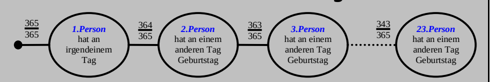
Stochastik I

Vorhersagen von Wkn
(mit Baumdiagrammen)

einfache Bäume

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man damit rechnen, dass in einem Kurs von 23 Schülern mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

(1) E: mind. 2 Personen am gleichen Tag
$\overline{E}$: nur je 1 Person am gleichen Tag d.h. alle an einem anderen Tag

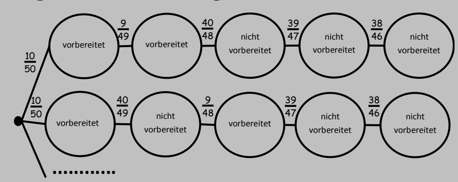
(2) 

(3) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot 343}{365^{23}} = 50{,}73\%$

Mammutbäume

Ein Lehrer gibt vor einer Prüfung einen Fragenkatalog mit 50 Fragen heraus, von denen dann 5 dem Prüfling vorgelegt werden. Hans bereitet sich auf 10 der Fragen vor. Mit welcher Wk erhält er genau 2 vorbereitete Fragen?

(1) E: genau 2 der 5 Fragen sind vorbereitete

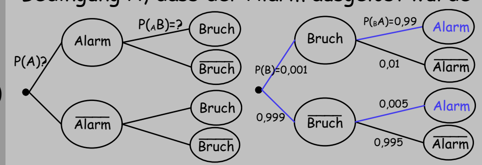
(2) 

(3) $P(E) = \left(\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{40}{48}\cdot\frac{39}{47}\cdot\frac{38}{46}\right)\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 20{,}98\%$

bedingte Bäume

Die Alarmanlage eines Geschäftes gibt bei einem Einbruch mit der Wk 0,99 Alarm. Aber auch ohne Einbruch gibt sie mit der Wk 0,005 (falschen) Alarm. Die Einbruchswk in der Nacht beträgt 0,001. Wie groß ist die Wk, dass wenn der Alarm ausgelöst wird, tatsächlich ein Einbruch stattfindet?

(1) E: $_AB$, d.h. ein Einbruch B findet statt unter der Bedingung A, dass der Alarm ausgelöst wurde

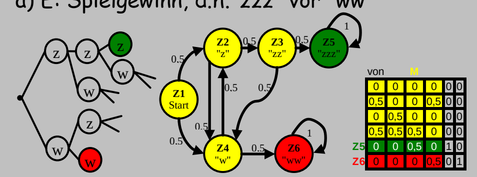
(2) 

(3) $P(E)=P(_AB)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}001\cdot 0{,}99}{0{,}001\cdot 0{,}99+0{,}999\cdot 0{,}005}=16{,}54\%$

unendliche Bäume

Eine Münze wird so lange geworfen, bis das Muster "zzz" (Gewinn) oder "ww" (Verlust) eintritt.
a) Wie groß ist die Wk bei diesem Spiel zu gewinnen?
b) Wie groß ist die mittlere Wartezeit bis zum Spielenden?

(1) a) E: Spielgewinn, d.h."zzz" vor "ww"

(2) 

(3) $\vec{P}(E) = (H-M_t)^{-1}\cdot\vec{Z5_t} = \begin{pmatrix}0{,}3\\0{,}4\\0{,}6\\0{,}2\end{pmatrix}$; $\vec{w} = (H-M_t)^{-1}\cdot\vec{1} = \begin{pmatrix}4{,}2\\3{,}6\\2{,}4\\2{,}8\end{pmatrix}$

H: Einheitsmatrix

Standardlösungsverfahren

(1) E: (Was soll passieren? evtl. $\overline{E}$)
(2) Baum (E schrittweise pass. lassen)
(3) P(E) =... (mit Pfadregeln bestimm)

- $P(E) = P(E_1)\cdot$Anzahl Pfade
- $P(_AB) = P(A\cap B)/P(A)$
- $P(E) = Bin_{n,p}(X \le x)$

Ziel der Wks-Rechnung
3 Arten Wkn zu bestimmen
Zufallsvorgang ↔ det. Vorgang
Ausgang, Ereignis, $\overline{E}$

Baum (Wurzel, Knoten, Ast, Pfad):
komprimierte, unvollständige Bäume
wann Formel: $7!$ $\frac{7!}{2!}$ $\frac{7!}{2!\cdot 5!}$ $\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$
bedingter Baum, $P(_AB)$, $P(A\cap B)$, $P(A)$

$Bin_{n,p}(x)$: Unterschied zur Analysis
n, p, x, X, Gleichung, Graph
$Hyp_{n,R,N}(x)$: n, R, N, Gleichung
$Nor_{\mu,\sigma}(x)$: μ, σ, Gleichung, Graph
kumulierte ↔ nicht kumul. Funktion
Umkehrprobleme bei Bin(x)
Hauptstreubereich

Aufbereitung einer Daten-Urliste
als Rangliste (Spannweite, Median)
als Häufigkeitsliste (Modal-, Mittel-, Streu-)
als Diagramm: Stab-, Kreis-, Boxplot

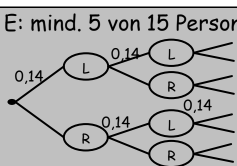
Stochastik II

Vorhersagen von Wkn
(mit Funktionen[1])

binomiale Bäume

a) In einer Bevölkerung sind ca. 14% Linkshänder. Wie groß ist die Wk, dass von 15 Personen dieser Bevölkerung mindestens 5 Linkshänder sind?

(1) E: mind. 5 von 15 Personen Linkshänder

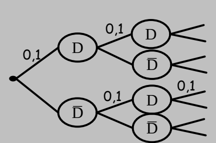
(2) 

binomialer Baum mit n = 15, p = 0,14, E: X ≥ 5

(3) $P(X\ge 5) = Bin_{15;\,0,14}(X\ge 5)$
$= 1-Bin_{15;\,0,14}(X\le 4) = 4{,}78\%$

b) Eine Maschine produziert 10% Ausschuss. Mit welcher Wk sind unter 6000 Stanzteilen mindestens 5420, die zur Weiterverarbeitung taugen?

(1) E: Man erhält höchstens 580 Defekte

(2) 

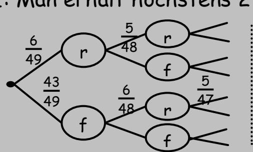
binomialer Baum mit n = 6000, p = 0,1, E: X ≤ 580

(3) $P(X\le 580) = Bin_{6000;\,0,1}(X\le 580)$
$\approx Nor_{600;\,23,24}(X\le 580{,}5) = 20{,}07\%$

hypergeom. Bäume

Wie groß ist die Wk, beim Lotto höchstens 2 Richtige zu haben?

(1) E: Man erhält höchstens 2 Richtige

(2) 

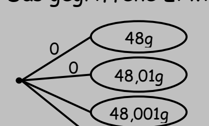
hypergeometrischer Baum mit n = 6, N = 49, R = 6; E: X ≤ 2

(3) $P(X\le 2) = Hyp_{6;6;49}(X\le 2) = 98{,}14\%$

stetige Knotenwerte

Auf einer Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern stellt sich heraus, dass ein Ei im Durchschnitt 50g wiegt (Standardabweichung 5g). Wie groß ist die Wk, dass ein zufällig herausgegriffenes Ei zwischen 48g und 54g wiegt?

(1) E: Das gegriffene Ei wiegt 48g-54g

(2) 

stetige Knotenwerte, E: 48 ≤ X ≤ 54

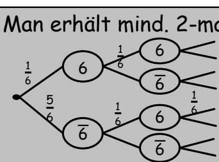
(3) $P(E) = Nor_{50;\,5}(48\le X\le 54)$
$= Nor_{50;\,5}(X\le 54) - Nor_{50;\,5}(X\le 48)$
$= 44{,}35\%$

Umkehrprobleme bei binomialen Bäumen

n gesucht

Wie oft muss man einen gerechten Würfel mind. werfen, um mit einer Wk von mind. 95% mind. 2-mal eine "6" zu erhalten?

(1) E: Man erhält mind. 2-mal eine "6"

(2) 

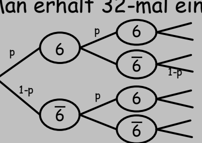
binomialer Baum mit n = ?, p = 1/6, E: X ≥ 2

(3) $P(X\ge 2) \ge 0{,}95$
$\Rightarrow Bin_{n;0,167}(X\ge 2) \ge 0{,}95$
$\Leftrightarrow 1-Bin_{n;0,167}(X\le 1) \ge 0{,}95$
$\Leftrightarrow Bin_{n;0,167}(X\le 1) \le 0{,}05$
$\Rightarrow n \in [27;\infty)$

p gesucht (schätzen)

Man hat keinen Anhaltspunkt, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit p für eine "6" bei einem verbeulten Würfel ist. Deshalb wirft man ihn 50-mal und erhält 32-mal eine "6". Schätze p mit einem 95% Vertrauensintervall.

(1) E: Man erhält 32-mal eine "6"

(2) 

binomialer Baum mit n = 50, p = ?, E: X =32

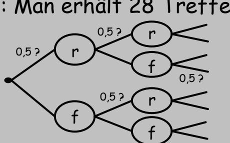
(3) Annahme: E liegt im Hauptstreubereich
$\Rightarrow 0{,}025 \le P(X\le 32) \le 0{,}975$
$\Rightarrow 0{,}025 \le Bin_{50;\,p}(X\le 32) \le 0{,}975$
$\Rightarrow p \in [0.5123;\ 0.7708]$

Wenn man davon ausgeht, dass das erzielte Stichprobenergebnis innerhalb des Hauptstreubereichs (95%) liegt, muss sich p im angegebenen Intervall befinden.

x gesucht (testen)

Annika vermutet, dass sie einen außergewöhnlichen Geschmacksinn hat und erkennen kann, ob der Tee mit entkalktem oder nicht entkalktem Wasser hergestellt wurde. Bei 44 Versuchen stimmen ihre Angaben in 28 Fällen. Ist damit ihre Vermutung bestätigt? (Signifikanzniveau 5%)?

(1) E: Man erhält 28 Treffer bei 44 Versuchen

(2) 

binomialer Baum mit n = 44, $p_{spek} \ne 0{,}5$ → beidseitiger Test mit $p_0 = 0{,}5$, E: X = 28

(3) Liegt E noch im Hauptstreubereich von p_0?
$0{,}025 \le P(X\le x) \le 0{,}975$
$\Rightarrow 0{,}025 \le Bin_{44;\,0,5}(X\le x) \le 0{,}975$
$\Rightarrow x \in [16;\ 27]$

Da das Stichprobenergebnis außerhalb des Hauptstreubereichs (95%) liegt, kann p_0 abgelehnt und somit p_{spek} angenommen werden; d.h. Annika kann davon ausgehen, dass sie nicht nur rät.

[1] Die Funktionswerte von Bin(x), Hyp(x), Nor(x) lassen sich leicht ermitteln mit dem Excelblatt *stochastik.xls* unter www.stefanbartz.de