

# Stochastik I Vorhersagen von Wkn (mit Baumdiagrammen)



einfache Bäume	Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man damit rechnen, dass in einem Kurs von 23 Schülern mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?	<p>(1) E: mind. 2 Personen am gleichen Tag  <math>\bar{E}</math>: nur je 1 Person am gleichen Tag d.h. alle an einem anderen Tag</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 50,73\%</math></p>
Mammutbäume	a) Ein Lehrer gibt vor einer Prüfung einen Fragenkatalog mit 50 Fragen heraus, von denen dann 5 dem Prüfling vorgelegt werden. Hans bereitet sich auf 10 der Fragen vor. Mit welcher Wk erhält er genau 2 vorbereitete Fragen?  b) Eine Münze wird so lange geworfen, bis das Muster <b>zzz</b> (gewonnen) oder <b>ww</b> (verloren) eintritt. Wie groß ist die Wk bei diesem Spiel zu gewinnen? Nach wie vielen Würfeln ist das Spiel mit 95%-iger Sicherheit beendet?	<p>(1) E: genau 2 der 5 Fragen sind vorbereitete</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(E) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{50}\right)^2 \cdot \left(\frac{40}{49}\right)^3 = 20,98\%</math></p> <p>(1) E: Spielgewinn, d.h. <b>zzz</b> vor <b>ww</b></p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>\vec{P}(E) \approx M^{100} \cdot \vec{v}_0</math></p>
bedingte Bäume	Die Alarmanlage eines Geschäftes gibt bei einem Einbruch mit der Wk 0,99 Alarm. Aber auch ohne Einbruch gibt sie mit der Wk 0,005 (falschen) Alarm. Die Einbruchswk in der Nacht beträgt 0,001. Wie groß ist die Wk, dass wenn der Alarm ausgelöst wird, tatsächlich ein Einbruch stattfindet?	<p>(1) E: <math>A \cap B</math>, d.h. ein Einbruch B findet statt unter der Bedingung A, dass der Alarm ausgelöst wurde</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(E) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,001 \cdot 0,99}{0,001 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 0,005} = 16,54\%</math></p>

**Standardlösungsverfahren**

(1) E: (Was soll passieren? evtl.  $\bar{E}$ )  
 (2) Baum (E schrittweise pass. lassen)  
 (3)  $P(E) = \dots$  (mit Pfadregeln bestimme)

- $P(E) = P(E_i) \cdot \text{Anzahl Pfade}$
- $P(A \cap B) = P(A \cap B) / P(A)$
- $P(E) = \text{Bin}_{n,p}(X \leq x)$

Zufallsvorgang  $\leftrightarrow$  det. Vorgang  
 Ausgang, Ereignis,  $\bar{E}$   
**Baum** (Wurzel, Knoten, Ast, Pfad):  
 komprimierte, unvollständige Bäume  
 bedingter Bäume,  $P_A(B)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(A)$   
 wann Formel:  $\frac{7!}{2!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$   
 $\text{Bin}_{20,0,6}(X=3) \leftrightarrow \text{Bin}_{20,0,6}(X \leq 3)$   
 $p_{\text{spek}} \leftrightarrow p_0$ : Hauptstrebereich

**Aufbereitung einer Daten-Urliste**  
 als Rangliste (Spannweite, Median)  
 als Häufigkeitsliste (Modal-, Mittel-, Streu-)  
 als Stabdiagramm bzw. Histogramm, Boxplot

# Stochastik II Vorhersagen von Wkn (mit Funktionen<sup>1</sup>)



binomiale Bäume	a) In einer Bevölkerung sind ca. 14% Linkshänder. Wie groß ist die Wk, dass von 15 Personen dieser Bevölkerung mindestens 5 Linkshänder sind?  b) Eine Maschine produziert 10% Ausschuss. Mit welcher Wk sind unter 6000 Stanzteilen mindestens 5420, die zur Weiterverarbeitung taugen?	<p>(1) E: mind. 5 von 15 Personen Linkshänder</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(X \geq 5) = \text{Bin}_{15,0,14}(X \geq 5) = 1 - \text{Bin}_{15,0,14}(X \leq 4) = 4,78\%</math></p> <p>(1) E: Man erhält höchstens 580 Defekte</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(X \leq 580) = \text{Bin}_{6000,0,1}(X \leq 580) \approx \text{Nor}_{6000,23,24}(X \leq 580,5) = 20,07\%</math></p>
hypergeom. Bäume	Wie groß ist die Wk, dass ich beim Lotto höchstens 2 richtige Zahlen tippe?	<p>(1) E: Ich tippe 0, 1 oder 2 richtige Zahlen</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(X \leq 2) = \text{Hyp}_{6,6,49}(X \leq 2) = 98,14\%</math></p>
stetige Knotenwerte	Auf einer Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern stellt sich heraus, dass ein Ei im Durchschnitt 50g wiegt (Standardabweichung 5g). Wie groß ist die Wk, dass ein zufällig herausgegriffenes Ei zwischen 48g und 54g wiegt?	<p>(1) E: Das gegriffene Ei wiegt 48g-54g</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(E) = \text{Nor}_{50,5}(48 \leq X \leq 54) = \text{Nor}_{50,5}(X \leq 54) - \text{Nor}_{50,5}(X \leq 48) = 44,35\%</math></p>

n gesucht	Wie oft muss man einen gerechten Würfel mind. werfen, um mit einer Wk von mind. 95% mind. 2-mal eine "6" zu erhalten?	<p>(1) E: Man erhält mind. 2-mal eine "6"</p> <p>(2) </p> <p>(3) <math>P(X \geq 2) \geq 0,95</math>  <math>\Rightarrow \text{Bin}_{n,0,167}(X \geq 2) \geq 0,95</math>  <math>\Leftrightarrow 1 - \text{Bin}_{n,0,167}(X \leq 1) \geq 0,95</math>  <math>\Leftrightarrow \text{Bin}_{n,0,167}(X \leq 1) \leq 0,05</math>  <math>\Rightarrow n \in [27; \infty)</math></p>
p gesucht (schätzen)	Man hat keinen Anhaltspunkt, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit p für eine "6" bei einem verbeulten Würfel ist. Deshalb wirft man ihn 50-mal und erhält 32-mal eine "6". Schätze p mit einem 95% Vertrauensintervall.	<p>(1) E: Man erhält 32-mal eine "6"</p> <p>(2) </p> <p>(3) Annahme: E liegt im HSB von <math>\text{Bin}_{50,p}</math>  <math>\Rightarrow 0,025 \leq P(X \leq 32) \leq 0,975</math>  <math>\Rightarrow 0,025 \leq \text{Bin}_{50,p}(X \leq 32) \leq 0,975</math>  <math>\Rightarrow p \in [0,5123; 0,7708]</math></p>
x gesucht (testen)	Annika vermutet, dass sie einen außergewöhnlichen Geschmacksinn hat und erkennen kann, ob der Tee mit entkalktem oder nicht entkalktem Wasser hergestellt wurde. Bei 44 Versuchen stimmen ihre Angaben in 28 Fällen. Ist damit ihre Vermutung bestätigt? (Signifikanzniveau 5%)?	<p>(1) E: Man erhält 28 Treffer bei 44 Versuchen</p> <p>(2) </p> <p>(3) Liegt E noch im HSB von <math>\text{Bin}_{44,p_0}</math>?  <math>0,025 \leq P(X \leq x) \leq 0,975</math>  <math>\Rightarrow 0,025 \leq \text{Bin}_{44,0,5}(X \leq x) \leq 0,975</math>  <math>\Rightarrow x \in [16; 27]</math>                  Da das Stichprobenergebnis E außerhalb des HSB (95%) liegt, kann <math>p_0</math> abgelehnt und somit <math>p_{\text{spek}}</math> angenommen werden; d.h. Annika kann davon ausgehen, dass sie nicht nur rät.</p>

<sup>1</sup> Die Funktionswerte von Bin(x), Hyp(x), Nor(x) lassen sich leicht ermitteln mit dem Excelblatt *stochastik.xls* unter [www.stefanbartz.de](http://www.stefanbartz.de)