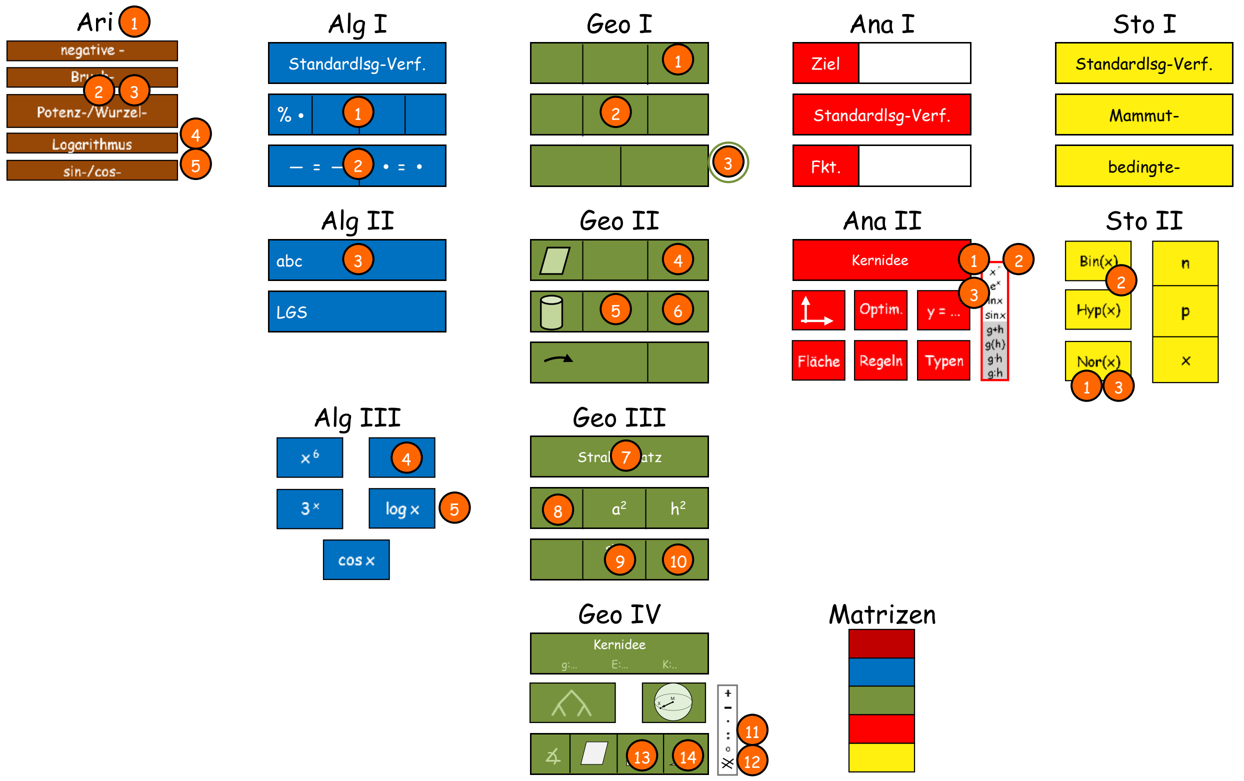
Beweistraining

zzgl. der Themen ∗Änderungsrate ∗Differentialgleichung ∗Parametrik ∗Komplexe-Zahlen



"Reden lernt man durch Reden.
Beweisen lernt man durch Beweisen."

Die 4 Beweisverfahren der Mathematik

Man versucht, den zu beweisenden Satz als mit auszudrücken und die Gleichung dann mit einem der folgenden 4 Verfahren zu bewiesen:

	Man überführt die eine Seite der Gleichungen (evtl. Bottom-up-Trick nutzen)
	(1.) Man nimmt an, dass der zu beweisende Satz **nicht stimmt**, und zeigt (2.) dass sich (3.) Damit ist die Annahme widerlegt und der Satz bewiesen.
	Um die Falschheit einer Aussage zu beweisen, genügt es,
	(1.) Man zeigt, dass die Gleichung für (2.) Man nimmt an, dass sie und zeigt (3.), dass sie dann auch gelten muss.

Welche Ziele werden mit diesem Beweistraining verfolgt? (s. S 40)

Wie lassen sich Vektorbeträge in Geometriebeweisen „entfernen“? $|\vec{a}|^2 =$ oder $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos\alpha =$

Arithmetik

Satz 1: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

- Aus welchen 3 Schritten bestehen indirekte (Widerspruchs-) Beweise?
- Wie werden Widerspruchsbeweise tagtäglich genutzt? „Angenommen mein Mandant wäre der Täter gewesen, ….“
- Was sind Primzahlen? Zerlegen Sie in Primfaktoren: 12, 90, 99, 27
- Zeigen Sie, dass 2, 3, 5, 7 nicht die einzigen Primzahlen sein können?

z.z.: Es gibt unendlich viele Primzahlen

nun: Angenommen es gäbe nur die Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ Also endlich viele und p_n wäre die größte.
Dann dürfte die daraus gebildete größere Zahl keine weitere Primzahl sein.
Gleichzeitig müsste sie aber eine sein, da sie sich in Es verbleibt immer Rest 1.
$\Rightarrow$ Annahme kann nicht wahr sein. ■ Sie würde zu einer unsinnigen Aussage führen, die gleichzeitig w und f sein müsste.

Satz 2: $\sqrt{2}$ ist nicht abbrechend und nicht periodisch.

- Welche Zahlenmengen kennen Sie?
- Was sind irrationale Zahlen?
- Wie lässt sich jede abbr. bzw. period. Zahl als Bruch schreiben? $1{,}94\overline{388} =$
- Wie lässt sich anhand der Primfaktorzerlegung entscheiden, ob es sich um eine Quadratzahl handelt? 156=
22050 = 784= → Jede Primzahl muss in gerader Anzahl auftreten.

z.z.: $\sqrt{2}$ ist nicht abbrechend oder periodisch

nun: Angenommen $\sqrt{2}$ wäre doch abbrechend oder periodisch.
Dann ließe sich $\sqrt{2}$ darstellen, d.h. es müssten zwei natürliche Zahlen n und m existieren mit
$= \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ d.h. n^2 müsste den Primfaktor "2" einmal mehr enthalte als m^2, also in
Anzahl; gleichzeitig müssten n^2 ihn, als Quadratzahl, in Anzahl enthalten.
$\Rightarrow$ Annahme kann nicht wahr sein. ■ Sie würde zu einer Aussage führen, die gleichzeitig w und f sein müsste.

Satz 3: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ enthalten gleich viele Zahlen, $\mathbb{R}$ enthält mehr Zahlen.

- Zeigen Sie, dass die Menge der Quadratzahlen Qz = {0; 1; 4; 9; 16; 25, …) und die Menge $\mathbb{N}$ exakt gleich viele Zahlen besitzen müssen.
- Wann enthalten 2 Mengen A und B gleich viele Elemente? Wenn zwischen ihnen eine
möglich ist. Jedes Element hat dann einen eindeutigen Partner in der anderen Menge und es gibt keine partnerlosen Elemente.
- Was ist verblüffend bei unendlichen Mengen und wie lässt sich diese Eigenschaft zeigen?
Man kann massenhaft Elemente entfernen, ohne dass sich

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$

z.z.: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ abzählbar unendlich

nun:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$\mathbb{Q}$																		…

Man nummeriere fortlaufend alle vollständig gekürzten und noch nicht vorgekommenen Brüche.
Dies ist eine vollständige Paarbildung (Bijektion): Jede Zahl kommt genau 1-mal vor, keine bleibt partnerlos. ■

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
0	3,547343…
1	88,737272…
2	-7,451783…
3	-0,111000…
4	40,913983…
…	……..

z.z.: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ überabzählbar unendlich (Mächtigkeit des Kontinuum: $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$)

nun: Angenommen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ enthielten gleich viele Zahlen. Dann müsste zwischen ihnen eine vollständige Paarbildung möglich sein. In der entsprechenden Zuordnungstabelle müssten alle $\mathbb{R}$-Zahlen irgendwann auftauchen (keine darf ja partnerlos bleiben). Gleichzeitig lässt sich die in der Tabelle nicht auftauchen kann, da sie sich an der i-ten Nachkommastelle von jeder vorkommenden i-ten Zahl unterscheidet (im Beispiel rechts etwa) $\Rightarrow$ Annahme kann nicht wahr sein. ■

Satz 4: Drei wichtige endliche Zahlenreihen

- Wenden Sie die Formeln a) und b) für n=99 und c) für n=5 und x=2 an.
- Wie können die Formeln a) und b) graphisch und wie mit dem Standardverfahren der Analysis beweisen werden?
- Aus welchen 3 Schritten besteht das Beweisverfahren der vollständigen Induktion? Wann lässt es sich nur anwenden?

z.z.: a) $1+2+3+\ldots+n =$ b) $1+3+5+7+\ldots+n =$ c) $x^0+x^1+x^2+\ldots+x^n =$ geom. Reihe

a) *stimmt sie für n=1?*

stimmt sie für n=k+1? Angenommen $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ gelte, gilt dann auch:

nun: $1+2+3+\ldots+k+(k+1) =$ ■

Somit stimmt die Formel für n=1 und für *jeden* Nachfolger, folglich für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

b) *stimmt sie für n=1?*

stimmt sie für n=k+2? Angenommen $1+3+5+\ldots+k = \frac{(k+1)(k+1)}{4}$ gelte, gilt dann auch:

nun: $1+3+5+\ldots+k+(k+2) =$ ■

c) nun: $x^0+x^1+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\Leftrightarrow$ $(x^0+x^1+x^2+\ldots+x^n)\cdot(1-x) = 1-x^{n+1}$ $\Leftrightarrow$ $= 1-x^{n+1}$ ■

Satz 5: Zwei wichtige unendliche Zahlenreihen

- Erläutern Sie den Unterschied zw. einer Folge und einer Reihe anhand der Fibonacci-Folge und der Folge $(0{,}1^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Wieso muss $0{,}\overline{9}$ = 1 absolut exakt gelten? Sonst wäre
- Erklären Sie anhand von 3 Beispielen, unter welchen Bedingungen eine unendliche Zahlenreihe konvergieren kann.
  $0{,}1^0+0{,}1^1+0{,}1^2+0{,}1^3+\ldots = 1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots =$
  $0{,}5^0+0{,}5^1+0{,}5^2+0{,}5^3+\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots =$
  Aber: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots =$
- Beschreiben Sie das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte und decken Sie den Denkfehler auf. In einem Rennen lässt Achilles der Schildkröte 32 m Vorsprung; er selbst läuft doppelt so schnell wie sie. Eigentlich dürfte Achilles die Schildkröte nie einholen, denn immer, wenn er dort ist, wo die Schildkröte vorher war, ist diese schon wieder ein Stückchen weiter. Wieso überholt er sie doch?

z.z.: $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$ gilt, sonst $= \infty$

nun: $\lim\limits_{n\to\infty} x^0 + x^1 + \ldots + x^n =$ $= \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$ ■ | siehe Satz 4c) und Grenzwertsätze

z.z.: $\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\ldots=\infty$ Divergiert; die hinzukommenden Nachkommawerte werden zu langsam klein.

nun: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+$ ■ aber $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ (Zeta-Funktion) und $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e-1$

Algebra

Satz 1: Die "von"-Merkregel in der Prozentrechnung funktioniert immer.

- Erläutern Sie, wie die 4 Aufgabentypen der Prozent- und Zinsrechnung schnell gelöst werden können.

z.z.: Hinter der Merkregel steckt die Gleichung bzw. ; es genügt also, diese zu beweisen.

nun: Wenn sich der Prozentsatz p verdoppelt, dann verdoppelt sich auch der Prozentwert W, d.h. beide Größen stehen in einem Zusammenhang. Entsprechende Verhältnisse sind somit immer gleich, also ■

Satz 2: Bei proportionalen (antiprop.) Dreisatzaufgaben dürfen entsprechende Verhältnisse (Produkte) gleichgesetzt werden.

- Wieso sind die Uni-Vorlesungen meistens axiomatisch aufgebaut? Man startet mit wenigen, nicht beweisbaren Axiomen...
- Wie lautet der proportionale und der antiproportionale Dreisatz?

nun: ver-k-facht sich Größe x so ver-k-facht sich auch Größe y ⇒

$\left(\quad \right) \Leftrightarrow \left(\quad \right) \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ■

ver-k-facht sich Größe x so k-telt sich Größe y ⇒

$\left(\quad \right) \Leftrightarrow \left(\quad \right) \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ ■

Satz 3: Die Binomischen Formeln und die abc-Formel gelten immer.

nun: $(a + b)^2 = (a + b)\cdot(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ■ | Distributiv- u. Kommutiativgesetzt

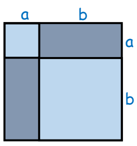
nun: Sei $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben | $a \neq 0$

⇔

⇔

⇔

⇔ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ■



Satz 4: "Quadrieren" ist keine Äquivalenzumwandlung (es können zusätzliche Scheinlösungen entstehen).

nun: Aus $\sqrt{x} = -7$ müsste dann x = 49 und damit folgen. ■ Gegenbeispiel

Satz 5: Die Potenz- und Logarithmusregeln gelten immer.

- Nennen Sie die 5 Potenz- und die 3 Logarithmusregeln.

nun: $a^r \cdot a^s = \ldots =$ ■ nun: $a^r \cdot b^r = \ldots =$ ■ nun: $(a^r)^s = \ldots =$ ■ Ist a < 0, müssen r u. s ungerade Nenner haben.

nun: $\log_b a + \log_b c = \log_b a\cdot c \;\Leftrightarrow\; b^{\log_b a + \log_b c} = b^{\log_b a\cdot c} \;\Leftrightarrow$ ✓ ■ bottom-up

nun: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Leftrightarrow \log_b a \cdot \log_c b = \log_c a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_c a = \log_c a \Leftrightarrow a=a$ ✓ ■ bottom-up

Satz 6 : Frauen sind böse.

- Wieso ist folgender Beweis falsch? Wieso sind unumstößliche Beweise nur innerhalb der Mathematik möglich?

z.z.: Frauen sind böse.

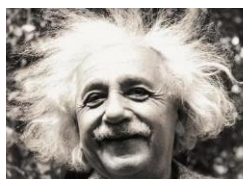
nun: Zweifellos anerkannt ist die Tatsache, dass Frauen Geld und Zeit erfordern, also:

Frauen = Geld · Zeit | Wie wir alle wissen, ist Zeit Geld.

= Geld · Geld | Bekanntlich ist Geld die Wurzel alles Bösen.

= $\sqrt{\text{Böse}} \cdot \sqrt{\text{Böse}}$

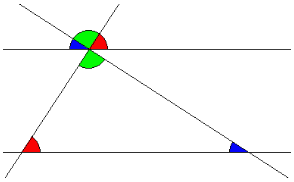
= Böse ■

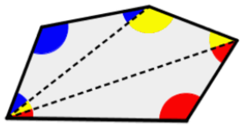


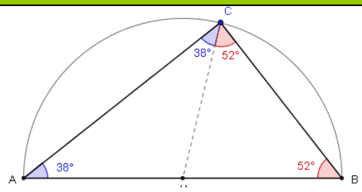
Geometrie

Satz 1: Die Innenwinkelsumme beträgt in allen Dreiecken 180°, in allen n-Ecken (n-2)·180° Satz 2: Satz des Thales.

nun:

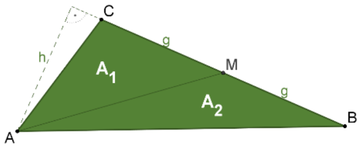






Satz 3: Die Mittelsenkr., Winkelhalb. bzw. Seitenhalb. schneiden sich immer im Umkreis-, im Inkreis- bzw. im Schwerpunkt.

Tipp: Jeder Punkt einer Mittelsenkrechten ist gleich weit entfernt von den jeweiligen Eckpunkten → Umkreispunkt
Jeder Punkt einer Winkelhalbierenden ist gleich weit entfernt von den jeweiligen Schenkeln → Inkreispunkt
Seitenhalbierende ist Schwerlinie, da $A_1 = A_2$ (g und h gleich) → Schwerpunkt



Satz 4: Die Flächenformel für den Kreis stimmt immer (und absolut exakt).

- Wieso muss $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ die Gleichung des Halbkreises sein? s. Abb.
- Erläutern Sie das Integrationsverfahren der Substitution anhand von $\int_0^2 \frac{2x+3}{(5x+2)^2}\,dx$.
  Wie kommt man auf den Substitutionsansatz? Oft muss der Nenner zusammengefasst und ein Bruch entfernt werden.
- Wieso gilt $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ und wie lässt sich damit $\int (\cos x)^2\,dx$ bestimmen? Am Einheitskreis zeigen.

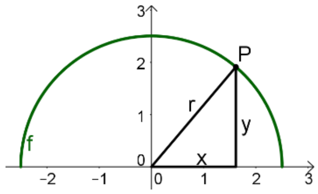
z.z.: $A_{Kreis} = \pi\, r^2$

nun: $A_{Kreis} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2r\cdot\int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,dx$

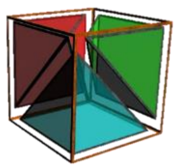
$= 2r\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 z}\cdot r\cdot\cos z\,dz$

$= 2r^2\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 z\,dz$

$= 2r^2\cdot\left[\frac12\cdot\sin z\cdot\cos z + \frac12 z\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^2\cdot\pi$ ■



Satz 5: Die Volumenformel für Pyramide und Kegel stimmen immer.



- Zeigen Sie, dass die Pyramidenformel bei quadr. Pyramiden stimmt. $V_{Pyramide} =$
- Wie lautet der Strahlensatz? Wie lautet der Vergrößerungsfaktor der Fläche?
- Wie kann man m.H. der Analysis zeigen, dass $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$. Wertetabelle

z.z.: $V_{Pyramide} = \frac13 G\cdot h$

nun: Man teilt die Höhe in n Teile auf und zeichnet n-1 Prismen im Innern der Pyramide.

$\Rightarrow V_{Pyramide} = \lim\limits_{n\to\infty} (V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1})$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{h}{n}(G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1})$

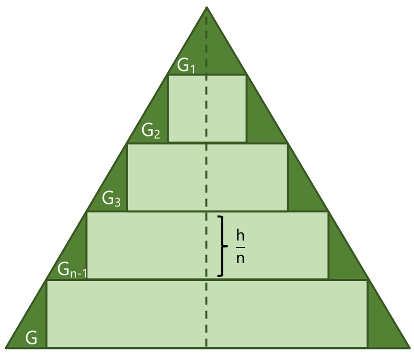
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{h}{n}(\quad G + \quad G + \ldots + \quad G)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{G\cdot h}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)$

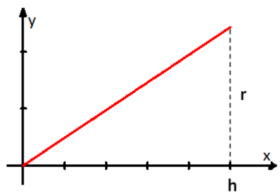
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{G\cdot h}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} G\cdot h\left(\frac13 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$

$= \frac13 G\cdot h$ ■



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der roten Gerade rechts.



z.z.: $V_{Kegel} = \frac13 G\cdot h$

nun: Man "legt" den Kegel mit der Höhe auf die x-Achse und
lässt die äußere Kante $f(x) = \frac{r}{h}x$ um die x-Achse rotieren.

$V_{Kegel} = V_{Rotationskörper} = \pi\cdot\int_0^h f(x)^2\,dx = \pi\cdot\int_0^h \qquad = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\Big[\qquad\Big]_0^h = \frac13\pi r^2 h = \frac13 G\cdot h$ ■

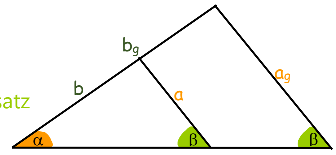
Satz 6: Die Volumenformel für die Halbkugel stimmt immer.*

z.z.: $V_{Halbkugel} = \frac23 G\cdot h$

nun: $V_{Halbkugel} = V_{Rotationskörper} = \pi\cdot\int_0^r \qquad dx = \pi\cdot\Big[\qquad\Big]_0^r = \pi\cdot\frac23 r^3 = \frac23 G\cdot h$ ■

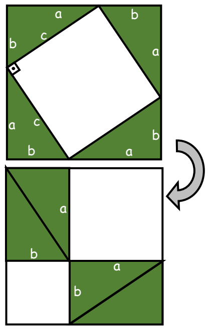
* A_{Kreis} und V_{Kugel} liefern – abgeleitet – die Formeln für Kreisumfang und Kugeloberfläche (Wieso? s. S. 39).

Satz 7: Der Strahlensatz stimmt immer.



z.z.: $\frac{a_g}{a} = \frac{b_g}{b}$ falls $\vec{a}_g \parallel \vec{a}$ nun: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \quad = \quad$ ■ | Stufenwinkel, Sinussatz

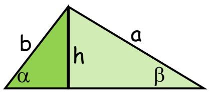
Satz 8: Der Pythagoras gilt in allen rechtwinkligen Dreiecken.



z.z: $c^2 = a^2 + b^2$ | falls c Hypotenuse ist

nun: Jedes rechtwinklige Dreieck lässt sich, , zu nebenstehendem Quadrat anordnen.
In der Mitte entsteht dann immer ein weißes Quadrat der Fläche c^2. | wieso?
Eine Verschiebung zeigt, dass diese weiße c^2–Fläche gleichzeitig $a^2 + b^2$ groß sein muss. ■
Ohne Verschiebung, rechnerisch: $c^2 = \qquad = a^2 + b^2$ ■

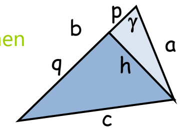
Satz 9: Der Sinussatz gilt in allen Dreiecken.



z.z.: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ | bottom-up

nun: $\frac{a}{\sin\alpha} = \quad = \quad = \quad = \frac{b}{\sin\beta}$ ■

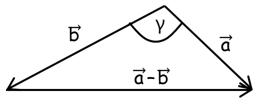
Satz 10: Der Kosinussatz gilt in allen Dreiecken.



z.z.: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

nun: $c^2 = q^2 + h^2$ | q und h entfernen
$=$ | p entfernen
$= (b - a\cdot\cos\gamma)^2 + (a\cdot\sin\gamma)^2$
$= b^2 - 2b(a\cdot\cos\gamma) + (a\cdot\cos\gamma)^2 + (a\cdot\sin\gamma)^2$
$=$ | $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$
$= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$ ■

Satz 11: Mit der Rechenweise $\vec{a}\circ\vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ kann man tatsächlich den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ermitteln.



z.z.: $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$ und somit $\gamma = \cos^{-1}\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

nun: $\vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ | bottom-up
$= 0{,}5\,(2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3)$
$= 0{,}5\,[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2]$
$= 0{,}5\,[\,|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\,]$ | Kosinussatz s. Abb.
$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$ ■

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$
$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$
$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = 0{,}5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$

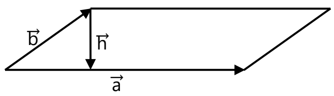
Satz 12: Die Rechenweise $\vec{a}\times\vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ liefert immer einen auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht stehenden Vektor und seine Länge entspricht genau dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms.

z.z.: $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ d. h. $\vec{a}\times\vec{b}\circ\vec{a} = 0$ und $\vec{a}\times\vec{b}\circ\vec{b} = 0$

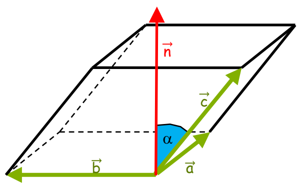
nun: $\vec{a}\times\vec{b}\circ\vec{a} = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$ ■

z.z.: $|\vec{a}\times\vec{b}| = A_{Para}$ bzw. $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (A_{Para})^2$

nun: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$
$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)$ | bottom-up
$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$
$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\circ\vec{b})^2$ | Winkelformel
$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2\alpha$ | Ausklammern
$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1 - \cos^2\alpha)$ | $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$
$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(\sin^2\alpha)$
$= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{h}|^2 = (g\cdot h)^2 = (A_{Para})^2$ ■



Satz 13: Das gemischte Produkt liefert immer das exakte Spatvolumen.



z.z.: $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = V_{Spat}$

nun: $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \vec{n}\circ\vec{c}$ | Winkelformel
$=$ | cos-Definition
$=$ | $|\vec{n}| = A_{Para}$
$= G\cdot h = V_{Spat}$ ■ | $V < 0 \Rightarrow 90° < \alpha < 270°$ $\Rightarrow$ $\vec{n}$ und $\vec{c}$ zeigen in unterschiedliche Halbräume

Satz 14: Die beiden Abstandsformeln liefern immer den exakten Abstand.

z.z.: $d_{g,P} = \frac{|\vec{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ bzw. $d_{E,P} = \frac{|\vec{AP}\circ\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

nun: $d_{g,P} = h_{Para} = \qquad = \frac{|\vec{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ bzw. $d_{E,P} = h_{Spat} = \qquad = \frac{\vec{AP}\circ\vec{v_1}\times\vec{v_2}}{\vec{v_1}\times\vec{v_2}} = \frac{|\vec{AP}\circ\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ■

Analysis

Satz 1: Die in der Tabelle angegebenen Fktn f' liefern tatsächlich die vollkommen exakte Steigung und zwar an allen Stellen.

- Wie kann man die Steigung eines krummlinigen Graphen visualisieren und wieso mit $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ exakt bestimmen? Durch Einzeichnen der Tangente. Deren Steigung – u. damit auch die des Graphen – lässt sich mit dem GW der Sekantensteigung exakt bestimmen. (s. Anhang I).
- Beweisen Sie ohne Ableitung, dass die Steigung bei $y = x^2$ an der Stelle 3 tatsächlich exakt 6 beträgt.
- Beweisen Sie ohne Ableitung, dass die Steigung bei $y = x^2$ an der Stelle x_0 tatsächlich exakt $2x_0$ beträgt.

$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

F	f	f'
$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	x^r	rx^{r-1}
$e^x + c$	e^x	e^x
$x\cdot\ln x - x + c$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$-\cos x + c$	$\sin x$	$\cos x$
$k\cdot G$ $G \pm H$	$k\cdot g$ $g \pm h$	$k\cdot g'$ $g' \pm h'$
☠ ☠ ☠ G(h)	g(h) $g(h)\cdot h'$	$g'(h)\cdot h'$
$G\cdot h - \int G\cdot h'$	$g \cdot h$	$g'h + gh'$
$\int f(z)\,dz$	$\frac{g}{h}$	$\frac{g'h-gh'}{h^2}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_1^n y_i\cdot\Delta x$	f	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
numerische…	f	… Verfahren
orient. Fläche Gesamtmenge	f	Steigung Änderungsrate

Grundfunkt. / Zusammengesetzt. Funkt.

a) z.z.: Die Steigung bei $y = x^r$ beträgt an der Stelle x_0 tatsächlich exakt rx_0^{r-1}

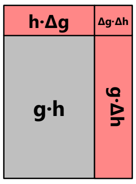
nun: $\frac{d\,x_0^r}{dx} =$ | Pascalsche Dreieck

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\binom{r}{0}\cdot x_0^r\cdot\Delta x^0 + \binom{r}{1}\cdot x_0^{r-1}\cdot\Delta x^1 + \binom{r}{2}\cdot x_0^{r-2}\cdot\Delta x^2 + \ldots + \binom{r}{r}\cdot x_0^0\cdot\Delta x^r - x_0^r}{\Delta x}$ | $r \in \mathbb{N}$

$= rx_0^{r-1}$ ■

b) z.z.: $\frac{d\,g\cdot h}{dx} = g'h + gh'$ | falls g und h differenzierbar sind

nun: $\frac{d\,g\cdot h}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\,g\cdot h}{\Delta x} =$ | s. Abb.



$=$ | Grenzwertsätze

$= h\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta h$ | h stetig

$= h\cdot\frac{d\,g}{dx} + g\cdot\frac{d\,h}{dx} + \frac{d\,g}{dx}\cdot 0$

$= h\cdot g' + g\cdot h'$ ■

c) z.z.: $\frac{d\,g(h)}{dx} = g'(h)\cdot h'$ | falls g und h differenzierbar sind | h stetig

nun: $\frac{d(g(h(x_0)))}{dx} = \frac{d(g(x_0))}{dx} = \quad = \quad = \quad = g'(h(x_0))\cdot h'(x_0)$ ■

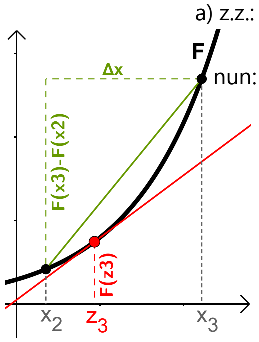
Satz 2 (HDI): Die in der Tabelle angegebenen Funktionen F liefern tatsächlich den exakten orient. Flächeninhalt.

- Wie kann man zeigen, dass die Fktn F der Tabelle tatsächlich Stammfunktionen sind? (Durch , s. Satz 2b und 2c.)
- Wie kann man die orient. Fläche eines krummlinigen Graphen visualisieren und wieso mit $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_1^n y_i\cdot\Delta x$ exakt bestimmen? Da dies der GW einer ist. Die y_i können beliebig gewählt werden (s. Anhang II).
- Beweisen Sie ohne Stammfkt., dass die Fläche unter $y = x^2$ von 0 bis 4 tatsächlich exakt $21{,}\overline{3}$ beträgt.
- Beweisen Sie ohne Stammfkt., dass die Fläche unter $y = x^2$ von 0 bis x_0 tatsächlich exakt $1/3\cdot x_0^3$ beträgt.

$\int_0^{x_0} x^2\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_1^n y_i\cdot\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\cdot(\qquad) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\cdot(\qquad)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0^3}{n^3}\cdot(\qquad) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0^3}{n^3}\cdot\left(\qquad\right) = \frac{1}{3}(x_0)^3$

a) z.z.: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ | D. h. Stammfkt-Differenzen liefern tatsächlich die absolut exakte orient. Fläche.



nun: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}$ | z_i beliebig wählbar

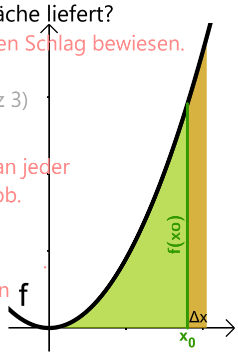
$= \lim\limits_{n\to\infty}($ | alle z_i werden entsprechend gewählt

Die Abb. zeigt, dass es in jedem Intervall, z.B. $[x_2;x_3]$, eine Stelle z_3 geben muss, deren Tangentensteigung $F'(z_3)$ genau mit der Sekantensteigung $\frac{F(x_3)-F(x_2)}{\Delta x}$ übereinstimmt.
$\Rightarrow F'(z_3)\cdot\Delta x = F(x_3)-F(x_2)$.

$= \lim\limits_{n\to\infty}($

$= F(b) - F(a)$ ■

- Ist damit automatisch für alle (!) Funktionen f gezeigt, dass F(b)–F(a) immer die absolut exakte orient. Fläche liefert?
  Genialerweise: Ja! Wir haben mit diesen 3 Beweisschritten die gesamte linke Spalte der obigen Tabelle auf einen Schlag bewiesen.
  Man muss jedoch beachten, dass die Argumentation in der Sprechblase nur bei
  Glücklicherweise sind alle Grundfktn der Schulmathematik, und damit auch ihre Verkettungen, stetig. (vgl. Satz 3)
- Wie lässt sich noch erkennen, dass „Stammfkt F" und „or. Flächenfkt O" im Prinzip dasselbe sein muss?
  Die Graphen von F und O müssen das besitzen. Ihre Steigungswerte entsprechen an jeder Stelle x_0 genau . Bei F gilt per Definition. Bei O ist direkt aus der Abb. ersichtlich (wieso?). F und O haben somit voneinander verschoben Graphen.



- Achtung: (1) Nur Differenzen (F(b)–F(a)) liefern den or. Flächeninhalt exakt, da nur dann
  (2) Nennen Sie anhand von $f(x)=e^{-x^2}$ 2 Gründe, warum F-Fktn schwieriger als f'-Fktn zu finden sind. (3) Nennen Sie 3 Lücken im Beweis 2a). (4) Wann sind Fktn integrierbar, wann differenzierbar und wann stetig? (s. Satz 3)

Weitere Beweise zur Tabelle und zu Satz1 und Satz2.

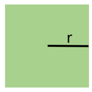
1d) z.z.: $\frac{d\,e^x}{dx} = e^x$ | Newton entdeckt ~1665 die Potenzreihen von e^x, sin x und cos x

nun: $\frac{d\,e^x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)$ | unerlaubt aber didaktisch wertvoll

$=$ ■

e) z.z.: $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

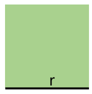
nun: $\frac{d \sin x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\right)$ | unerlaubt aber didaktisch wertvoll



$=$ ■

f) z.z.: $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

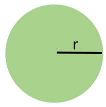
nun: $1 = \quad = \quad = \quad = x \cdot \frac{d \ln x}{dx}$ ■ | Kettenregel



g) z.z.: $\frac{d\,x^r}{dx} = r \cdot x^{r-1}$ | für $r \in \mathbb{R}$ und $x>0$ (im Komplexen auf $x \in \mathbb{R}$ erweiterbar)

nun: $\frac{d\,x^r}{dx} = \quad = \quad = \quad = r \cdot x^{r-1}$ ■ | Kettenregel

h) z.z.: $\frac{d}{dx}\,\frac{g}{h} = \frac{g'h - gh'}{h^2}$ | Produkt- u. Kettenregel

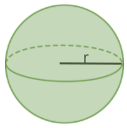


nun: $\frac{d}{dx}\,\frac{g}{h} = \quad = \quad = \quad = \frac{g'h - gh'}{h^2}$ ■

i) z.z.: Die Ableitung der Kreisfläche $A = \pi r^2$ muss exakt dem Kreisumfang entsprechen.

nun: $\frac{dA}{dr} = \lim\limits_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = \quad = \quad = U$ | s. Visualisierung

j) z.z.: Die Ableitung des Kugelvolumens $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ muss exakt dem Oberflächeninhalt entsprechen.



nun: $\frac{dV}{dr} = \lim\limits_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} = \quad = \quad = O$ | s. Visualisierung

2b) z.z.: $\int g \cdot h \quad = G \cdot h - \int G \cdot h'$ D.h.: die rechte Seite ist Stammfunktion von g·h

nun: $(G \cdot h - \int G \cdot h')' = \quad = \quad = g \cdot h$ ■

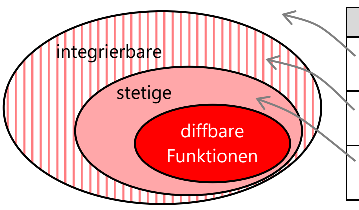
c) z.z.: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h) \cdot h'\,dz$ D.h.: der orient. Flächeninhalt bleibt gleich, wenn x derart durch h(z) ersetz wird.

nun: $\int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h) \cdot h'\,dz =$ | "Kettenregel rückwärts"

$= \quad = \quad = \int_a^b f(x)\ dx$ ■

Satz 3: Nachweisverfahren wichtiger Eigenschaften von f

f ist überall* …	**anschaulicher Nachweis** (bei exotischen Fktn evtl. ungültig)	**exakter Nachweis**
umkehrbar		$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle x_1, x_2
streng monoton		$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ für alle x_1, x_2
integrierbar**		$\lim\limits_{n\to\infty} OS = \lim\limits_{n\to\infty} US$ für alle [a, b]
stetig		$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ für alle x u. Δx
differenzierbar		$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert für alle x u. Δx



Beispiele	
$f(x) =$	∞ viele Sprünge keine eindeutige Fläche
$f(x) =$	1 Sprung
$f(x) =$	1 Knick keine eindeutige Steigung

* Immer bezogen auf den Definitionsbereich. So ist die Hyperbel $f(x) = x^{-1}$ *überall* stetig, da die Sprungstelle x = 0 nicht zum Definitionsbereich gehört.

** Der HDI gilt (anders als die Integrierbarkeit) nicht an Sprung-, Oszillations- und Polstellen; sonst müsste z.B. $\int_0^2 (x-1)^{-2} dx = -2$ ↯ gelten.

*** Zusätzlicher anschaulicher Nachweis für die Differenzierbarkeit: Der Graph ist in jedem Punkt lokal durch genau eine Gerade approximierbar.

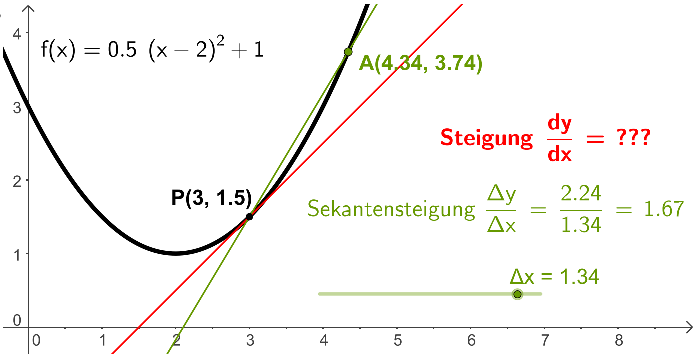
Anhang I: Grundverfahren, mit dem man Steigungen ohne Ableitungsfunktion exakt bestimmen kann.

- Wie bestimmt man die Steigung einer Geraden? Was ist eine Tangente? Was passiert, wenn Δx über den Schieberegler verringert wird?

- Berechnen Sie selbst die Steigung von f im Punkt P mit $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

  a) näherungsweise. (konkretes Δx)

  b) exakt. (allgemeines Δx)



- Was ist der Unterschied zwischen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{dy}{dx}$?

$\frac{dy}{dx} :=$

Anhang II: Grundverfahren, mit dem man orient. Flächeninhalte ohne Stammfunktion exakt bestimmen kann.

- Wie berechnet das abgebildeten Geogebra-Blatt U_5 und O_5? Was passiert, wenn n über den Schieberegler erhöht wird?

- Berechnen Sie selbst die orient. Fläche zwischen f und der x-Achse von 0 bis 5 mit $\lim_{n\to\infty}\sum_1^n y_i\cdot\Delta x$

  a) näherungsweise. (konkretes n)

  $O_5=$ $=14{,}4$

  $U_5=$ $= 8$

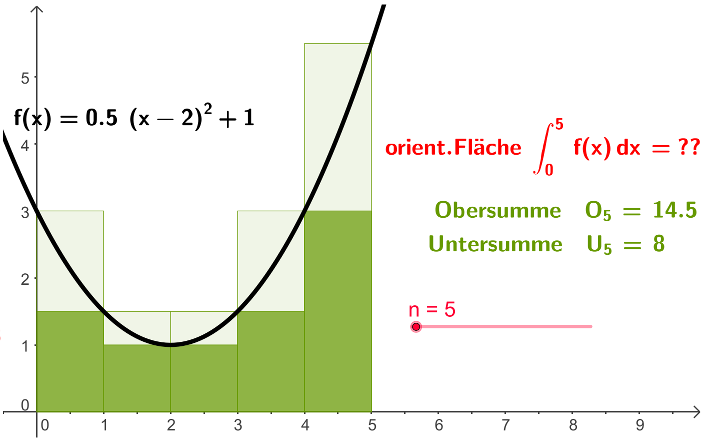
  $M_5=$ $=10{,}63$

  $L_5 =$ $=10$

  b) exakt. (allgemeines n)

  $\int_0^5 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n y_i\cdot\Delta x =$

  $=$ ...<viele Schritte nötig, ähnlich zu Satz 2 Vorbemerkung 4>... $= 10{,}8\overline{3}$



- Wofür steht das stilisierte „S" und wofür das „dx" bei der Beschreibung des orientierten Flächeninhalts?

  $\int_a^b f(x)\,dx =$

- **Merke**: Wie lassen sich Steigung und Fläche ohne Ableitungs- bzw. ohne Stammfunktion bestimmen?

  Mit dem bzw. mit dem

Ziele dieses schulischen Beweistrainings

- Einen wiederholenden Überblick über die zentralen Inhalte der Schulmathematik vermitteln.
- Den Übergang zu universitären Mathematikveranstaltungen erleichtern.
- Die Notwendigkeit von Beweisen aufzeigen.
- Den Unterschied zwischen der Anwendung und dem Beweis eines Satzes deutlich machen. (Vom WIE zum WARUM.)
- Die 4 Beweisverfahren der Mathematik exemplarisch vorstellen.
- Die Fähigkeit einüben, selbständig Beweise finden zu können.
- Ein Gespür für mathematische Exaktheit vermitteln (Wie kann man herausfinden, ob der jeweilige Beweis vollständig bzw. an welche Voraussetzungen er gebunden ist?)
- Die Notwendigkeit des axiomatischen Aufbaus der Mathematik verdeutlichen. (Wieso sind die Mathematikvorlesungen der Hochschulen in der Regel axiomatisch aufgebaut?)

Anmerkungen

- Es ist versucht worden, die Beweise so ähnlich wie möglich zu gestalten – die grundlegenden, immer wiederkehrenden Strukturen sollten möglichst klar hervortreten.
- Die Sätze sind ohne die notwendigen Voraussetzungen formuliert, oft mit einer provozierenden "immer"-Formulierung verstärkt und die Beweise meist auf *einen* wesentlichen Fall reduziert worden (so fehlt z.B. beim Sinus- und Kosinussatz die Behandlung der stumpfwinkligen Dreiecke, bei der Winkelsumme fehlt der konkave Fall usw.). Ungeübte Schüler sollen so den Überblick behalten können. Fortgeschrittene können den Gültigkeitsbereich der Aussagen hinterfragen und exaktere Formulierungen selbst versuchen zu finden.

Stochastik – Mittelwert und Varianz

Satz 1: Mittelwert und Varianz anhand einer Urliste, Häufigkeitsliste oder Wks-Verteilung bestimmen.

anhand einer …	Mittelwert	Varianz
Urliste einer GG gemessene Merkmalsgröße x_i	$\mu\ =$	$\sigma^2\ =$
Urliste einer SP gemessene Merkmalsgröße x_i	$\overline{x}\ =$	$s^2\ =$ $\approx \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
Häufigkeitsliste einer GG gemessene Merkmalsgröße x_i	$\mu\ =$	$\sigma^2\ =$
Wks-Verteilung mögliche Merkmalsgröße x_i	$\mu(X)\ =$	$\sigma^2(X)\ =$ $=\mu(X^2)-\mu(X)^2$

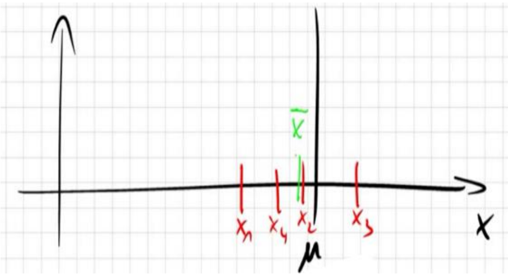
- Beschreiben Sie den Unterschied zwischen:
  a) Grundgesamtheit GG ↔ Stichprobe SP
  b) Urliste ↔ Rangliste ↔ Häufigkeitsliste
  c) μ ↔ $\overline{x}$ ↔ $\mu(X)$
  d) σ^2 ↔ s^2 ↔ $\sigma^2(X)$
  e) μ ↔ σ^2
- Nennen Sie 3 Mittel- und 3 Streuwerte. Median-, Modal-, arith. Mittelwert; mittlere Abw., Varianz, Standardabw.
- Mit welcher Excel-Funktion lässt sich eine Urliste in eine Häufigkeitsliste überführen? =
- Wieso verwendet man beim Streumaß $(x_i-\mu)^2$ statt $|x_i-\mu|$? ableitbar; zerfällt nicht in 2 Gleichungen
- Wieso muss die Stichprobenvarianz i.d.R mit der Näherungsformel bestimmt werden?
- Wie lässt sich die Varianz in Excel anhand des Verschiebungssatzes $\mu(X^2)-\mu(X)^2$ bestimmen?
  Statt einer Spalte mit Abweichungsquadraten $(x_i-\mu(X))^2$, benötigt man lediglich eine mit Merkmalquadraten x_i^2.
- Erläutern Sie, wie die Varianz der folgenden Wks-Verteilung mit und ohne Verschiebungssatz bestimmt wurde.

x_i	p_i	$x_i p_i$	$(x_i-\mu(X))^2 p_i$	$x_i^2 p_i$
-1	0,5	– 0,5	0,72	0,5
1	0,3	0,3	0,192	0,3
2	0,2	0,4	0,648	0,8
	Σ	0,2	1,56	1,6

$\mu(X) = 0{,}2$
$\sigma^2(X) = \mu((X-\mu(X))^2) = 1{,}56$
$\sigma^2(X) = \mu(X^2)-\mu(X)^2 = 1{,}6-0{,}2^2 = 1{,}56$

z.z.: Bei der Näherungsformel für die Stichprobenvarianz muss durch „n–1" statt durch „n" geteilt werden.

nun: Da die Messwerte x_i i.d.R weniger um den SP-Mittelwert $\overline{x}$ als um den wahren Mittelwert μ streuen (s. Abb.), wird nur durch „n-1" statt durch „n" geteilt. Dadurch vergrößert sich die berechnete Varianz etwas; sie stimmt so besser mit der gesuchten überein.



z.z.: Verschiebungssatz: $\sigma^2(X) = \mu(X^2)-\mu(X)^2$ bzw. $s^2 = \mu(X^2)-\mu(X)^2$

nun: $s^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2-2x_i\mu+\mu^2\right]$ | binomische Formel

$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu^2$

$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\cdot\mu+\mu^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu^2 = \mu(X^2)-\mu(X)^2$ ■

Satz 2: μ und σ² leichter bei der Bin- oder Hyp-Verteilung bestimmen.

- Wie lauten Erwartungswert und Varianz bei der Bin- und bei der Hyp-Verteilung? $\mu=$ $V_{Bin}=$ $V_{Hyp}=$

z.z.: Erwartungswert und Varianz der Bin-Verteilung lauten $\mu(X)=n\cdot p$ und $\sigma^2(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$

nun: $\mu(X) = \mu(X_1+X_1+\ldots+X_1) = \qquad = n\cdot p$ ■ | binomialvert. X setzt sich aus n Einzelvorgängen X_1 zusammen | Linearität von μ, s.u.

$\sigma^2(X) = \sigma^2(X_1+X_1+\ldots+X_1) = \qquad = n\cdot[\mu(X_1^2)-\mu(X_1)^2] = n\cdot(p-p^2) = np(1-p)$ ■ | Verschiebungssatz | $\mu(X_1^2) = 0^2\cdot(1-p)+1^2p = p$

Satz 3: μ und σ² leichter bei zusammengesetzten Wks-Verteilungen bestimmen (Linearität).

- Die unabhängigen Zufallsgrößen X und Z haben den Erwartungswert 7±1,1 bzw. 9±0,7. Bestimmen Sie
  a) $\mu(3X+4Z+8)$, $V(3X+4Z+8)$ b) $\mu(X+X+X)$, $V(X+X+X)$ c) $\sigma^2(3X)$ 65±21.1 | 21±3.3 | ±9,9
  zu a) $\mu(3X+4Z+8) = \qquad = 65$; $V(3X+4Z+8) = \qquad = 21.1$
- Wieso handelt es sich bei „3X" und „X+X+X" um unterschiedl. Zufallsgrößen? Wieso ist die Varianz der ersten viel größer?
  Bei der ersten wird das Zuffallsexperiment nur ausgeführt und das Ergebnis mit 3 multipliziert, bei der zweiten wird es ausgeführt. Beide haben den gleichen Mittelwert, $\mu(3X) = \qquad = \qquad = \mu(X+X+X)$. Jedoch ist die Varianz der ersten 3-mal so groß, da sich Schwankungen dort nicht ausgleichen können: $V(3X) = \qquad \gg V(X+X+X) = \qquad =$

z.z.: Linearität von μ: $\mu(aX+b) = a\cdot\mu(X)+b$ X, Z seinen voneinander unabhängig

nun: $\mu(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}\left((ax_i+b)p_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(ax_ip_i+bp_i) = a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i = a\cdot\mu(X)+b\cdot 1$ ■

z.z.: Nicht-Linearität von V: $V(aX+b) = a^2V(X)$ X, Z seinen voneinander unabhängig

nun: $V(aX+b) = \mu\left[(aX+b-\mu(aX+b))^2\right]$ | V ist der Mittelwert der Abweichungsquadrate | μ ist linear

$= \mu\left[(aX+b-a\cdot\mu(X)-b)^2\right]$ | a ausklammern, Potenzgesetze

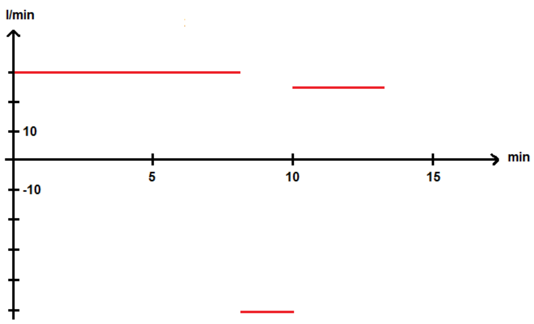
$= \mu\left[a^2(X-\mu(X))^2\right]$ | μ ist linear

$= a^2\mu\left[(X-\mu(X))^2\right]$ | V ist der Mittelwert der Abweichungsquadrate

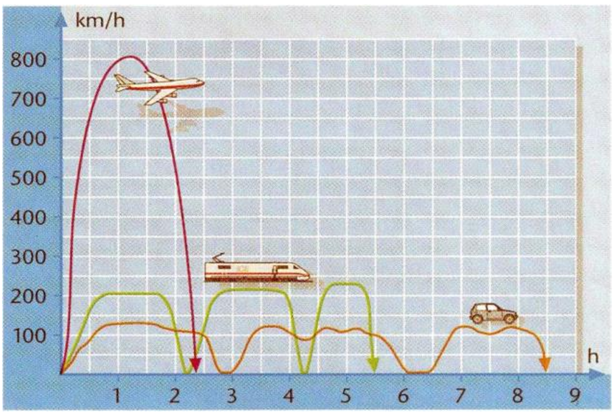
$= a^2V(X)$ ■

Änderungsrate und Gesamtmenge entsprechen Steigung und Fläche

1 In eine Badewanne wird gleichmäßig Wasser eingelassen (30 l /min). Nach 8 Minuten wird das Wasser abgedreht und aus Versehen der Stöpsel gezogen und es fließen für 2 Minute gleichmäßig 50 l /min ab. Um die Wanne wieder zu füllen, wird der Abfluss gesperrt und der Zufluss etwas geöffnet, so dass gleichmäßig für 3 Minuten 25 l /min zufließen.

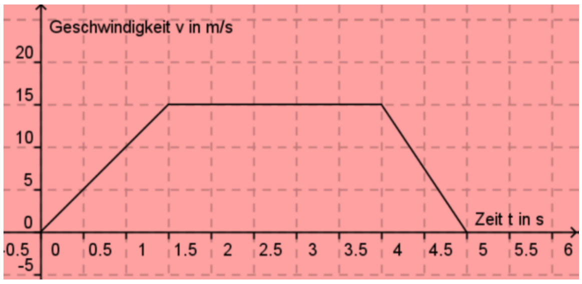


a) Wie viel Liter Wasser sind am Ende insg. in der Wanne?
b) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für obige Änderungsrate und für die unter a) ermittelte Gesamtmenge zum Zeitpunkt t auf.
c) Wofür steht in diesem Sachzusammenhang das „c" in der Stammfunktion?
d) Wieso müssen die Flächen oberhalb der x-Achse addiert und die unterhalb subtrahiert werden?



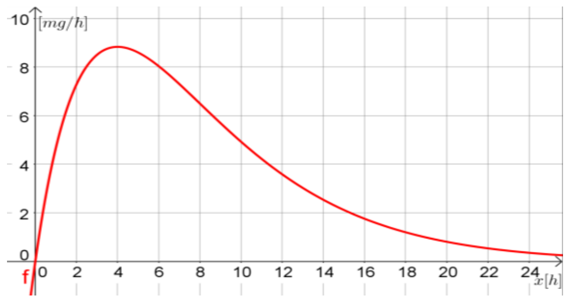
2 Das vorherige Bild zeigt die momentanen Geschwindigkeiten dreier Verkehrsmittel auf ihrem Weg von München nach Hamburg.
a) Bestimmen Sie näherungsweise die Strecken, welche die drei Verkehrsmittel jeweils zurückgelegt haben.
b) Berechnen Sie damit näherungsweise die Durchschnittsgeschwindigkeiten der Verkehrsmittel (inclusive Pausen).
c) An welchen Orten könnte das Auto eine Pause eingelegt haben?

3 Eine Seifenkiste fährt bergab, anschließend bewegt sie sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Waagerechten, bevor sie bergauf bis zum Stillstand rollt. (Die Abb. zeigt das v-t-Diagramm).



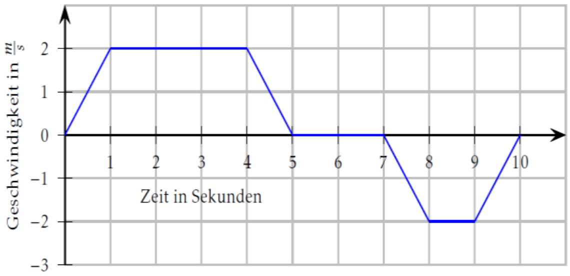
a) Skizzieren Sie ein entsprechendes s-t-Diagramm.
b) Welcher Weg wurde insgesamt zurückgelegt?
c) Wie lauten die Gleichungen für s und v?
d) Erklären Sie anschaulich, *warum* der Gesamtweg s genau der Fläche unter v entsprechen muss.

4 Die Funktion $f_a(t)=a\cdot t\cdot e^{-0,25t}$ $(a>0)$ beschreibt die Änderungsrate des Wirkstoffs im Blut eines Patienten nach Verabreichung eines Medikaments (s. Abb.).

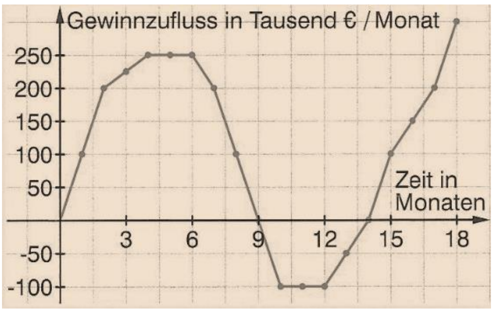


a) Gesundheitsgefährdungen können ab einer Änderungsrate von 14 mg/h eintreten. Welche Dosierungshöhe a darf demnach nicht überschritten werden?
b) Wann wird das Medikament am stärksten abgebaut?
c) Welche Wirkstoffmenge hat der Patient nach 24 Stunden insgesamt aufgenommen (für a = 6)? Bestimmen Sie auch die mittlere Änderungsrate in dieser Zeit.

5 Der unten abgebildete Funktionsgraph zeigt die Geschwindigkeit eines Aufzugs. a) In welcher Höhe befindet sich der Aufzug nach 10 Sekunden? b) Skizzieren Sie einen möglichen h-t-Graph.



6 Die monatliche Gewinnrate einer Firma ist im Diagramm abgebildet. Bestimmen Sie den Gesamtgewinn der Firma näherungsweise.



7 *Änderungsraten und Gesamtmengen erkennen.*

Gesamtmenge (Fläche)	Änderungsrate (Steigung)
Wassermenge [l]	Zuflussrate [l/std.]
Schadstoffmenge [g]	Schadstoffrate [g/min]
zurückgelegter Weg [m]	Geschwindigkeit [m/s]
Geschwindigkeit [m/s]	Beschleunigung [m/s^2]
Bestand [Anzahl]	Wachstum [Anzahl/Stunde]
Warenkorb-Wert [€]	Inflationsrate [€/Jahr]
Zerfälle [Anzahl]	Radioaktivität [Zerfälle/s] [Bq]
Ladungsmenge [C]	Stromstärke [C/s] [A]
Energie [J]	Leistung [J/s] [W]
Energie [J]	Kraft [J/m] [N]
Energie [J]	Spannung [J/C] [V]
Kreisfläche [m^2]	Kreisumfang [m^2/m]

a) Woran kann man erkennen, ob es sich bei einer gegebenen Größe um eine Änderungsrate handelt?
b) Nennen Sie 3 reale Probleme, bei denen die Änderungsrate gemessen und daraus die Gesamtmenge erschlossen wird.
c) Nennen Sie 3 reale Probleme, bei denen umgekehrt die Gesamtmenge gemessen und daraus die Änderungsrate erschlossen wird.

8 Die Kraft, die die Erde auf eine 2000 t Rakete ausübt, verändert sich mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt s nach folgender Gesetzmäßigkeit: $F(s)=2\cdot10^6\cdot9{,}81\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2\cdot s^{-2}$ [J/m]. Wie viel Energie wird benötigt, um die Rakete in eine 240 km hohe Umlaufbahn zu befördern? Wie viele Menschen könnten mit dieser Energie 10 Jahre lang ernährt werden?

1) a) V = 30·8 – 50·2 + 25·3 + c = 215 + c

b) $f(x)=\begin{cases}30\\-50\\25\end{cases};\quad F(x)=\begin{cases}30x+c\\-50x+c\\25x+c\end{cases}$

c) Bei konstanten Zuflüssen erkennt man unmittelbar, dass der orientierte Flächeninhalt zum gesamten Wasservolumen der Badewanne führt. Die Flächen oberhalb der x-Achse beschreiben das zugeflossene Volumen und müssen addiert werden, die Fläche unterhalb der x-Achse das abgeflossene Volumen und muss subtrahiert werden. Die Konstante c in der Stammfunktion beschreibt, wie viel Liter Wasser *vor* dem betrachteten Zeitpunkt 0 schon in der Wanne war.

2) a) $F_F(2{,}4)$ ≈ 54 Kästchen ≙1350 km; $F_Z(5{,}5)$ ≈35K ≙875 km;
$F_A(8{,}5)$ ≈ 30K ≙ 750 km b) 1350/2,4; 875/5,5; 750/8,5
c) nach ca. 11 K ≙ 275 km (evtl. Würzburg) und
nach weiteren 275 km (evtl. Göttingen)

3) a) steigende Parabel u. Gerade, fallende Parabel, vgl. c)
b) s=0,5·1,5·15+2,5·15+0,5·1·15= 56,25 + c

c) $v(t)=\begin{cases}10t\\15\\-15t\end{cases};\quad s(t)=\begin{cases}5t^2+c\\15t+c\\-7{,}5t^2+c\end{cases}$

d) Bei konstantem v ist klar, dass für den zurückgelegten Weg s = v·t gilt, s also der Rechteckfläche unter v entspricht. Bei nicht-konstantem v stellt man sich vor, dass sich v aus winzigen konstanten Abschnitten zusammensetzen würde. s ergäbe sich dann aus der Summe vieler schmaler Rechteckflächen unterhalb von v. Anhand dieser Vorstellung wird deutlich, dass auch bei nicht-konstantem v, der zurückgelegte Weg s ebenfalls der Fläche unter v entsprechen muss.

4) a) $y' = ae^{-t/4}(1-t/4)$; $H(4|4ae^{-1})$; a≤9,52 Einheiten
b) $y''=0{,}25ae^{-t/4}(t/4-2)$; W(8|…); nach 8 Stunden
c) $Y = -4ae^{-t/4}(t-4)+c$; $\int_0^{24} f_6\,dx \approx 94{,}33\,mg;\ \mu=\frac{1}{24}\int_0^{24} f_6 \approx 3{,}94\,\frac{mg}{h}$

5) a) 0,5·8·2 – 0,5·4·2 = 4 m + c (es kommt darauf an, in welcher Höhe der Aufzug zum Zeitpunkt 0 stand)
b) in den ersten 5 Sek.: steigende Parabel, Gerade, Parabel

6) Kästchen: 21–4,5+8,5 = 25 ≙ 25*1,5*50 + c = 1875 € + c

7) a) die Einheiten sind Quotienten (bei Becquerel, Amper, Watt, Newton nicht direkt erkennbar) b) Pegelmessung an Flüssen, Schadstoffmessung in Schornsteinen, Abflussmengen des Sees eines Pumpkraftwerks c) Wachstumsraten von Bakterien werden über Gesamtzahlmessungen bestimmt, Inflationsraten werden über den Gesamtpreis des Warenkorbs ermittelt, Geschwindigkeiten werden in Radarfallen über den gesamten zurückgelegten Weg pro Zeitabschnitt bestimmt, die Radioaktivität wird über die Gesamtzahl der Zerfälle bestimmt.

8) $4{,}54\cdot10^{12}$J (Integrationsgrenzen: $6{,}37\cdot10^6$m und $6{,}61\cdot10^6$m);
pro Tag benötigt ein Mensch ca. 10,8 MJ (= 3 kWh).

9) a) *enthält*: nur x | x und y | x, y und y′; x steht für ges. Zahl bzw. ∞ viele Zahlen; *Ziel*: x herausfinden, bzw. Gesetzmäßigkeit herausfinden
b) s. Abb.; y′ wird durch Integrieren entfernt c) enthält neben x und y noch y′ oder y′′ d) $y'=2y+3x \leftrightarrow f'(x)=2\cdot f(x)+3x \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2y+3x$
e) $y'=2x \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2x$; $Y=3x^2+c \leftrightarrow \int 6x\,dx=[3x^2+c]$
f) Im Schulbereich arbeitet man nur mit 1 unabhängigen Variablen (x), man weiß so automatisch, dass bei y′ nach x abgeleitet und bei Y nach x integriert werden muss. Im Hochschulbereich abreitet man jedoch mit mehreren unabh. Variablen. Folglich muss dort immer angegeben werden, nach welcher differenziert bzw. integriert werden soll, z.B. $\frac{d}{dy}\left(4x^2y-4xy^2+3x\right)$ oder $\int\left(4x^2y-4xy^2+3x\right)dy$ g) Grenzwerte

12) Ziel: y′ durch Integration entfernen.

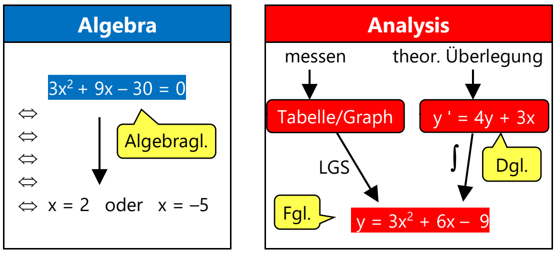
13) a) Wachstum jedes Jahr gleich; Wachstum ~Bestand; Wachstum ~ Restbestand (c-N); Wachstum ~ Bestand und Restbestand.
b) logist. Wachstum; c = Endbestand; a, b mit 2 Messungen best.
c) U = A′ = dA/dr; Ringfläche durch Ringhöhe=Grundseite=Umfang
d) O = V′ = dV/dr; Kugelschale durch Schalenhöhe=Grundfläche
e) $p'=2\cdot p \Rightarrow p = a\cdot e^{2x}$; a lässt sich z.B. mit p(0) bestimmen.
f) $p'=a\cdot(g-p)$; $p=a\cdot e^{-gt}+c$ g) N′~N; $N=a\cdot e^{bt}$; z.B. N(0), N(10) best.

Differentialgleichungen

9 Grundlagen

a) Was sind die Unterschiede zwischen Algebra-, Funktions- und Differentialgleichungen?

b) Wie haben wir bisher Fgl. gefunden und wie gelingt das nun mit Hilfe von Dgl.?



c) Was ist eine Dgl.? Wozu stellt man sie auf?

d) Nennen Sie verschiedene Schreibweisen einer Dgl.

e) Nennen Sie verschiedene Schreibweisen bei Ableitungs- und Integralfunktionen.

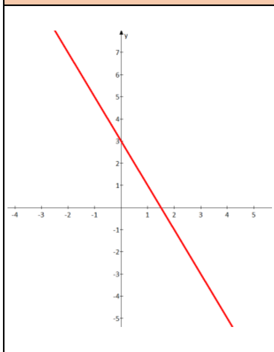
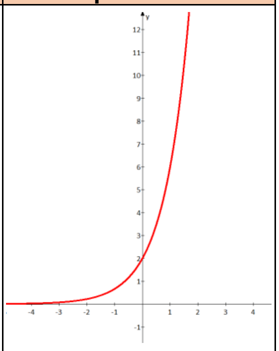
f) Wieso kommt man an der Schule ohne Differentiale aus, an der Hochschule jedoch nicht?

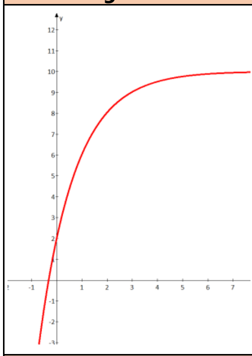
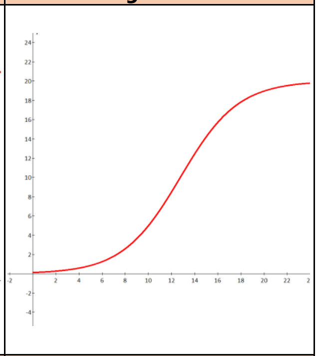
g) Was sind Differentiale?

10 *Einführungsbeispiel*: Beschreiben Sie, wie man die Fgl. des Weg-Zeit-Gesetzes des freien Falls m. H. einer Dgl. finden kann (in Schul- und Hochschulschreibweise, also einmal mit und einmal ohne Strichschreibweise).

$v \sim t$	$v \sim t$
$\Rightarrow\ s' \sim t$	$\Rightarrow\ \frac{ds}{dt} = k \cdot t$
$\Rightarrow\ s' = k \cdot t \quad \lvert \int \mathbf{dt}$	$\Leftrightarrow\ ds = k \cdot t\ dt \quad \lvert \int$
$\Leftrightarrow\ \int s'\ dt = \int kt\ dt$	$\Leftrightarrow\ \int 1 \cdot ds = \int kt\ dt$
$\Leftrightarrow\ [s + c_1] = [0{,}5kt^2 + c_2]$	$\Leftrightarrow\ [s + c_1] = [0{,}5kt^2 + c_2]$
$\Leftrightarrow\ s = 0{,}5kt^2 + c_3$	$\Leftrightarrow\ s = 0{,}5kt^2 + c_3$

11 Nennen Sie zu den folgenden vier wichtigen Wachstums-/Abbaufunktionen jeweils Name, Fgl., Dgl. und einen möglichen Anwendungsfall.

lineare	exponentielle
	
$y = ax + b$ $y' = a$	$y = a \cdot e^{\,b \cdot x}$ $y' = b \cdot y$
Abbau von Alkohol im Blut	Wachstum bei unbegr. Ressourcen

begrenzte	logistische
	
$y = a \cdot e^{-b \cdot x} + c$ $y' = b \cdot (c - y)$	$y = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-bcx}}$ $y' = b \cdot y \cdot (c - y)$
Wachstum bei begrenzten Ressourcen	Wachstum bei unbegr. und begrenzten Ressourcen

12 Dgl. lösen *(Trennen der Variablen)*

Erläutern Sie anhand der unteren 4 Beispiele, wie man von der Dgl. zur Fgl. kommen kann.

Dgl. (ohne y)	**Dgl.** (begrenztes Wachstum)
$y' = 8x - 5 \quad \lvert \int dx$ $\Leftrightarrow\ y + c_1 = 4x^2 - 5x + c_2$ $\Leftrightarrow\ y = 4x^2 - 5x + c_3$ **Dgl.** (exponentielles Wachst.) $y' = 4y$ $\Leftrightarrow\ (y)^{-1} \cdot y' = 4 \quad \lvert \int dx$ $\Leftrightarrow\ \ln y + c_1 = 4x + c_2$ $\Leftrightarrow\ \ln y = 4x + c_3$ $\Leftrightarrow\ y = e^{4x+c_3}$ $\Rightarrow\ y = k \cdot e^{4x}$	$y' = a \cdot (b - y)$ $\Leftrightarrow\ (b-y)^{-1} \cdot y' = a \quad \lvert \int dx$ $\Leftrightarrow\ \ln(b-y) + c_1 = -ax + c_2$ $\Leftrightarrow\ \ln(b-y) = -ax + c_3$ $\Leftrightarrow\ b - y = e^{-ax+c_3}$ $\Leftrightarrow\ y = -e^{c_3} \cdot e^{-ax} + b$ $\Rightarrow\ y = k \cdot e^{-ax} + b$
Dgl. (logistisches Wachst.) $y' = 2 \cdot y \cdot (3 - y)$ $\Leftrightarrow\ y' \cdot \frac{1}{y(3-y)} = 2$ $\Leftrightarrow\ y' \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3-y}\right) = 2$ $\Leftrightarrow\ y' \cdot y^{-1} + y' \cdot (3-y)^{-1} = 6 \quad \lvert \int dx$ $\Leftrightarrow\ \ln(y) - \ln(3-y) = 6x + c_3$	$\Leftrightarrow\ \ln \frac{y}{3-y} = 6x + c_3$ $\Leftrightarrow\ \frac{y}{3-y} = e^{6x+c_3}$ $\Leftrightarrow\ y = 3 \cdot e^{6x+c_3} - y \cdot e^{6x+c_3}$ $\Leftrightarrow\ y(1 + e^{6x+c_3}) = 3 \cdot e^{6x+c_3}$ $\Leftrightarrow\ y = \frac{3 \cdot e^{6x+c_3}}{1 + e^{6x+c_3}}$ $\Leftrightarrow\ y = \frac{3}{1 + e^{-6x-c_3}}$ $\Rightarrow\ y = \frac{3}{1 + k \cdot e^{-2 \cdot 3 \cdot x}}$

13 Dgl. durch theor. Überlegungen erschließen.

Nachdem wir nun wissen, wie man aus einer Dgl. die begehrte Fgl. erhält, bleibt noch die Frage, woher wir die Dgl. kennen, d.h. wie lässt sich eine Dgl. durch theoretische Überlegungen erschließen?

a) Wie lassen sich die Dgl. beim linearen, exponentiellen, begrenzten und logistischen Wachstum erschließen?

b) Sie wollen die Anzahl N der **Bakterien** auf dem Nährboden einer Petrischale vorhersagen. Sie suchen also die Fgl. N(t). Wie können Sie durch theoret. Überlegungen zur entsprechenden Dgl. und dann zur Fgl. gelangen?

c) Nachdem bewiesen war, dass sich die Fläche eines Kreises exakt mit $A=\pi\cdot r^2$ berechnen lässt, ließ sich die Fgl. für den **Umfang** schnell m. H. einer Dgl. ermitteln. Wie?

d) Nachdem bewiesen war, dass sich das Volumen einer Kugel exakt mit $V=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$ berechnen lässt, ließ sich die Fgl. für die **Oberfläche** schnell m. H. einer Dgl. ermitteln. Wie?

e) Eine Kolonie **Erkältungsbakterien** verdoppelt sich alle 2 Stunden. Geben Sie eine Dgl. und deren Lösung an.

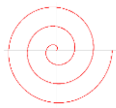
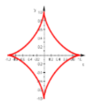
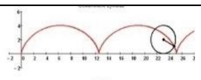
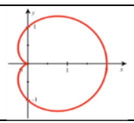
f) Angenommen, Sie beherrschten die **Schulmathematik** zu 100%, p(0)=100. Nach dem Abitur werden sie manche Inhalte vergessen, einen Grundanteil g jedoch ihr Leben lang behalten, p(90)=g. Wann wird die Vergessensrate p' am größten, wann am kleinsten sein; wovon wird sie also proportional abhängen? Stellen Sie eine Dgl. auf und lösen Sie diese.

g) Sie interessieren sich für die Fgl., die Ihnen die Anzahl N der noch nicht zerfallenen Atome eines **radioaktiven Stoffes** pro Zeit t angibt. Wie lautet wahrscheinlich die Dgl., wie die Fgl. und wie bestimmt man deren Parameter?

Koordinaten-/Parameter-/Polargleichung

Vom Funktionsgraph zur Kurve

Polargleichung

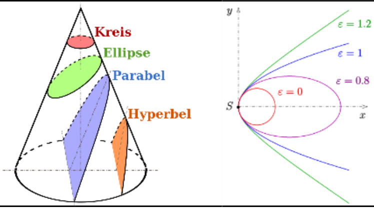
Objekt	**Koordinatengleichung** in expliziter oder impliziter Form	**Parametergleichung** in Punkt- und Vektorform	
Gerade	g: $y = 2x - 3$	P(t|2t-3|0)	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$
Ebene	E: $2x+3y-3z = 5$	P(1+3t|1+t-s|-3t-s)	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$
Parabel	f: $y = 2x^2 + 3x - 1$	P(t|$2t^2$+3t-1|0)	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2t^2+3t\\0\end{pmatrix}$
Hyperbel	f: $y= 3x^{-1} - 5$	P(t|$3t^{-1}$–5|0)	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\3t^{-1}\\0\end{pmatrix}$
Sinusgraph	f: $y = 2\cdot\sin x +5$	P(t|2sin t +5|0)	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2\cdot\sin t\\0\end{pmatrix}$
Ortskurve	k: $y = 5x^2$	H(0,2t|0,2t^2)	k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0{,}2t\\0{,}2t^2\\0\end{pmatrix}$
Kreis (Schar)	k_a: $x^2 + y^2 = a^2$	P(a· cos t |a· sin t|0)	k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cos t\\a\sin t\\0\end{pmatrix}$
Ellipse (Schar)	$k_{a,b}$: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$	P(a· cos t |a· sin t|0)	$k_{a,b}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\0\end{pmatrix}$
Spirale (Schar)	k_a: $x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$		k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cdot t\cdot\cos t\\a\cdot t\cdot\sin t\\0\end{pmatrix}$
Astroide (Schar)	k_a: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$		k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cdot(\cos t)^3\\a\cdot(\sin t)^3\\0\end{pmatrix}$
Zykloide (Schar)	k_a: $x=a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{y(2a-y)}$		k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cdot(t-\sin t)\\a\cdot(1-\cos t)\\0\end{pmatrix}$
Kardioide (Schar)	k_a: $(x^2+y^2)^2+4ax(x^2+y^2)-4a^2y^2=0$		k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2a\cos t\cdot(1-\cos t)\\2a\sin t\cdot(1-\cos t)\\0\end{pmatrix}$
Fkt.-Graph (im Raum)	f: $z = 0{,}5\cdot\cos(2xy)$	P(t|s|0,5cos(2tu))	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix}t\\s\\0{,}5\cos(2ts)\end{pmatrix}$
Kugel	k: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=19$	P(… | … | …)	k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}a\cdot\sin t\cdot\cos s\\a\cdot\sin t\cdot\sin s\\a\cdot\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$r = \varphi$
$r = \varphi^{-1}$
$r = e^{\varphi}$

$r = 2\cdot\cos(4\varphi)$
$r^2 = 2\cdot\cos(2\varphi)$

$r = a\cdot(1-\cos\varphi)$

<table>
<tr>
<td>Kegelschnitte
allgemein und mit Scheitelpunkt (0|0)</td>
<td>k: $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f \;\; =0$

k: $y^2=px+(\varepsilon^2-1)x^2$</td>
<td>
</td>
<td>anders also oben</td>
</tr>
<tr>
<td>Bézier-Kurve
(durch Pkt A,B,C,D)</td>
<td></td>
<td>k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} \cdot t^i \cdot x(P_i) \\ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} \cdot t^i \cdot y(P_i) \\ 0 \end{pmatrix}$</td>
<td>oft n=3</td>
</tr>
</table>

Zusammenhänge und Übung

14 Nennen Sie Vor- und Nachteile von Parametergleichungen am Beispiel einer Geraden.

Nachteil: Sie sind komplizierter, da sie aus 3 statt aus 1 Gleichung bestehen und verwirrende Hilfsvariablen t und s besitzen.

Vorteil: Da für die x, y und z Koordinaten eigenständige Gleichungen angegeben werden können, lassen sich damit wesentlich mehr Objekte darstellen (auch rückläufige, bei denen x-Stellen mehrere y-Werte besitzt).

15 Was ist der Unterschied zwischen:

a) Funktionsgraph ↔ Kurve
b) Koordinatengleichung ↔ Parametergleichung
c) Scharparameter a ↔ Hilfsparameter t

a) Kurven können rückläufig sein (x-Stellen haben mehrere y-Werte), Funktionsgraphen nicht. b) Parametergleichungen enthalten Hilfsvariablen und bestehen in der Regel aus 3 Gleichungen, Koordinatengleichungen nicht c) Hilfsparameter tauchen nur in Parametergleichungen auf. Sie ermöglichen, dass x-Stellen mehrfach in der Wertetabelle erscheinen können. Scharparameter stehen dagegen auch in der Koordinatengleichung. Mit ihnen können mehrere Graphen/Kurven erfasst werden.

16 a) Geben Sie eine Gerade, eine Parabel und eine Hyperbel in Geogebra ein; und zwar jeweils als Koordinatengleichung, als Parameterpunkt und als Parametergleichung. b) Wie erzeugt Geogebra die jeweiligen Abbildungen intern?

a) f : $y=2x^2+3x-1$; k=kurve(t, $2t^2+3t-1$,0, t, –4, 4); P=(t,$2t^2+3t-1$,0)
→ Vorher Schiebregler t mit Schrittweite 0.01 anlegen.
→ Dann Spurmodus per Rechtsklick auf P einschalten.

b) Geogebra durchläuft bei eingegebenen Funktionen eigenständig „alle“ x Werte und zeichnet die resultierenden Punkte. Beim Befehl „Kurve“ durchläuft es „alle“ Parameterwerte t und zeichnet ebenfalls die dann resultierenden Punkte.

17 Erzeugen Sie folgende Kurven in Geogebra mit dem Kurve-Befehl. (Bei e) vorher Schieberegler a erzeugen.)

a) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 4t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sin(2t) \\ 2\cos(5t) \\ 0 \end{pmatrix}$ d) k^{-1} von c).

e) k_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \cdot \cos a \cdot \cos t \\ t \cdot \cos a \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ für ganzzahlige a ∈ [0; 50]

18 Erzeugen Sie in Geogebra die Schieberegler a=0.2 [0;10; 0.1] und t=0 [0; 100; 0.01] und dann einen Punkt, der auf einer Spirale läuft.

19 Erzeugen Sie Kreis, Ellipse, Zykloide, Spirale, Astroide und Kardioide in Geogebra mit dem Kurve-Befehl. Animieren Sie danach den Schieberegler a.

20 Zeigen Sie, wie man die Koordinaten- und wie die Parameterdarstellung des Kreises erhält.

a) Mit Pythagoras bzw. b) mit sin-Def. und Winkel t.

21 Was ist der Unterschied zwischen einer **expliziten** und einer **impliziten** Koordinatengleichung?

Bei einer expliziten Koordinatengleichung lässt sich die abhängige Variable y (bzw. z) alleine stellen, bei einer implizierten nicht.

22 **Umwandlung**: Wie gelangt man von der Koordinaten- zur Parameterdarstellung und umgekehrt?

a) Bei expliziter Koordinatengl.: x = t setzen (geht immer).
b) Bei impliziter: andere Wege suchen (s. Kreis).
c) Bei der Parametergl.: mit der x-Gleichung t isolieren und t so in den übrigen Gleichungen ersetzen (analog zur Ortskurvenbestimmung). Nicht immer möglich.

23 Legen Sie (a) 3, (b) 4 Punkte in Geogebra fest und erzeugen Sie die **Bézier-Kurve** dieser Punkte.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} (1-t)^2x(A)+2(1-t)tx(B)+t\text{^}2x(C) \\ (1-t)^2y(A)+2(1-t)ty(B)+t\text{^}2y(C) \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} (1-t)^3x(A)+3(1-t)^2tx(B)+3(1-t)t^2x(C)+t^3x(D) \\ (1-t)^3y(A)+3(1-t)^2ty(B)+3(1-t)t^2y(C)+t^3y(D) \\ 0 \end{pmatrix}$

24 a) Was sind **Polargleichungen**? b) Wie werden Polarpunkte in ein Koordinatensystem eingetragen bzw. wie in kartesische Koordinaten überführt? c) Erzeugen Sie die 6 Polarkurven der Tabelle mit Wolframalpha.

Polargleichungen enthalten r u. φ statt x u. y. Die sich ergebenen Polarkoordinaten $(r|\varphi)_P$ müssen in ein *Kreisnetz* statt in ein *Gitternetz* eingetragen werden, damit das jeweilige Objekt entsteht. Durch die Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Gleichung des Objekts manchmal kürzer darstellen. Prinzipiell ist es egal, ob r u. φ oder x u. y in einer Gleichung verwendet wird, die jeweiligen Punktkoordinaten können später leicht umgerechnet werden: $(\,x \mid y\,)_K = (\sqrt{x^2+y^2} \mid \pm\cos^{-1}\frac{x}{r}\,)_P$

$(\,r \mid \varphi\,)_P = (r\cdot\cos\varphi \mid r\cdot\sin\varphi)_K$.

c) Polargleichung mit: polar plot *r=phi*
Parametergleichung mit: parametric plot *(2tcos(t), 2tsin(t), 0)*

Euler entdeckt $e^{x\cdot i} = \cos x + i\cdot\sin x$

Von unendlichen Potenzreihen und komplexen Zahlen

Euler kennt wichtige unendliche Potenzreihen

$e^x =$

$e^x =$

$\cos x =$

$\sin x =$

$\frac{1}{1-x} =$ | ∫

$-\ln(1-x) =$

* √–Werte mit dem Newtonverf.
** entdeckt von Newton 1664

Die links notierten 6 Gleichungen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Über sie werden die *e*-, *sin*-, *cos*- und *ln*-Werte im TR ermittelt.*

- **Wie hat Bernoulli die obere Gleichung entdeckt?**

  Monatliche Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} \approx 1{,}0829$ €

  Tägliche Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365} \approx 1{,}0832$ €

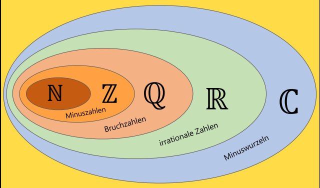
  Stetige Verzinsung zu 8%: $1€\cdot\left(1+\frac{0.08}{\infty}\right)^{\infty} \approx 1{,}0833$ € $= e^{0.08}$

- **Wie hat Taylor die nächsten drei Gleichungen hergeleitet?****
  Er versucht, die schwer berechenbare Funktion *exp:* $y=e^x$ durch eine leicht berechenbare Fkt *p:* $y = ax^0+bx^1+cx^2+dx^3$ vom Grad 3 anzunähern und fordert: $p(0)=\exp(0)$, $p'(0)=\exp'(0)$, $p''(0)=\exp''(0)$, $p'''(0)=\exp'''(0)$. So entsteht $1=a=b=2c=6d$, also $e^x \approx 1+\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ und bei zunehmendem Grad die angegebene unendliche Potenzreihe. Die Fakultäten im Nenner entstehen also durch die Mehrfachableitungen von p.
- **(zu cos u. sin):** Als Eselsbrücke kann man sich merken, dass die cos-Funktion aus den geraden und die si**n**-Funktion aus den u**n**geraden Reihenglieder der e-Potenzreihe besteht (mit jeweils alternierenden Vorzeichen). In Taschenrechnern müssen aus Periodizitätsgründen nur die sin- und cos-Werte im Intervall $0<x<0{,}5\pi$ berechnet werden. Bereits die ersten 3 Reihenglieder liefern dort schon sehr gute Näherungswerte.
- **(zu 5):** Die geometrische Potenzreihe wurde wahrscheinlich von den **Pythagoreern** in der Musik entdeckt. Bei einer Tonfolge mit gleichen Intervallen (z.B. Oktaven) bilden die zu greifenden Seitenlängen eine solche Reihe. Die Gleichung gilt natürlich nur für $-1< x <1$.
- **Gleichung 6** entsteht, wenn man (5) auf beiden Seiten integriert. → überprüfen!
  Viele Taschenrechner berechnen über diese Gleichung die Logarithmuszahlen. Es stört dabei nicht, dass sie nur für $-1< x <1$ gilt, da beim 10er-Logarithmus jede Zahl entsprechend umgeformt werden kann: $\log 1748 = \log 0{,}1748\cdot 10^4 = \log 0{,}1748 + 4$.

Wie erfährt Euler von diesen unendlichen Potenzreihen?
Euler studiert bei Johann Bernoulli, einem Freund seines Vaters. Die Bernoulli-Brüder gehören zu den führenden Mathematikern Europas. Sie wenden als erste die neue Analysis von Newton & Leibniz an. Sie kennen auch die Arbeit von Taylor, der in Cambridge bei Newton studiert.

Euler kann mit komplexen Zahlen rechnen

Idee



- Was sind komplexe Zahlen und wie kann man sie veranschaulichen? Ergänzt man die reellen Zahlen durch die „Minuswurzeln" , erhält man die komplexen Zahlen. Sie liegen und müssen mit 2 Koordinaten dargestellt werden (wobei die neue Koordinatenachse i-Achse genannt und $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird).
- Wozu benötigt man Minuszahlen? Um jede Gleichung lösen zu können.
  Wozu benötigt man Minuswurzeln? Um jede Gleichung lösen zu können.
  Lösen Sie die Gleichung $x^2 = -0{,}49$ und markieren Sie die Ergebniszahl auf der Zahlenebene.
  $x^2 = -0{,}49 \Leftrightarrow x =$ $\Leftrightarrow x =$ (Liegen auf der i-Achse, ober- und unterhalb der 0)
- Wieso darf nur i^2 durch -1 und nicht i durch $\sqrt{-1}$ ersetzt werden? $-1 = i^2 = i\cdot i \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$
- Wie hat man erkannt, dass das Rechnen mit Minuswurzeln sehr nützlich ist?
  Seit 1545 kennt man die Cardanische Formel, mit der man jede kubische Gleichung lösen kann. Die Formel liefert z.B. bei $x^3 - 15x - 4 = 0$ eine Minuswurzel. Rechnet man mit dieser sinnvoll weiter, erhält man die richtige Lösungszahl 4 (s. Aufg. 27).

3 Darstellungsformen

kart. Koord. Punkt-/Summenform	$(4\mid 3)_K =$	„4 nach rechts, 3 rechtwinklig nach oben"
Polarkoord. Punkt-/ e-Form	$(5\mid 2)_P =$	„5 nach rechts, 2^{RAD} kreisförmig nach oben"
Mischkoord. cos-sin-Form	$(\quad\mid\quad)_K$	Polarkoord. 5 und 2 sichtbar, das Ergebnis sind jedoch kart. Koord.

Umwandlung
kartes. Koord. ↔ Polarkoord.

$(r\mid\varphi)_P = (\quad\mid\quad)_K$ — $(5\mid 2)_P = (5\cdot\cos 2 \mid 5\cdot\sin 2)_K \approx (-2{,}08\mid 4{,}55)_K$

$(a\mid b)_K = (\sqrt{a^2+b^2}\mid \pm\cos^{-1}\frac{a}{r})_P$ neg., falls b neg. — $(4\mid 3)_K = (\sqrt{16+9}\mid \pm\cos^{-1}\frac{4}{5})_P \approx (5\mid 0{,}64)_P$

Rechnen mit kartes. Koord.
Strichrechnung leicht

$(a|b)_K + (c|d)_K = (\quad|\quad)_K$ — $(a|b)_K \cdot (c|d)_K = (ac-bd \mid ad+bc)_K$ Ausmultiplizieren

$(a|b)_K - (c|d)_K = (\quad|\quad)_K$ — $(a|b)_K : (c|d)_K = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \middle| \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right)_K$ Erweitern mit c-di

Rechnen mit Polarkoord.
Punktrechnung leicht

$(r|\alpha)_P + (s|\beta)_P =$ …zu kompliziert… — $(r|\alpha)_P \cdot (s|\beta)_P = (\quad|\quad)_P$

$(r|\alpha)_P - (s|\beta)_P =$ …zu kompliziert… — $(r|\alpha)_P : (s|\beta)_P = (\quad|\quad)_P$

$\bar{z}$ „z konjungiert" • meint die an der reellen-Achse gespiegelte Zahl — $z = (4|3)_K \Rightarrow \bar{z} = (4|-3)_K$

$|z|$ „z Betrag" • meint den Abstand zum Ursprung 0 — $|z| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = 5$

Eulers Frage

Was „macht" die e-Funktion mit einer komplexen Zahl?

Eulers Entdeckung

$$e^{a+b\cdot i} = e^a \cdot e^{b\cdot i} = e^a \cdot \left(\frac{(bi)^0}{0!} + \frac{(bi)^1}{1!} + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^5}{5!} \ldots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\frac{b^0 i^0}{0!} + \frac{b^1 i^1}{1!} + \frac{b^2 i^2}{2!} + \frac{b^3 i^3}{3!} + \frac{b^4 i^4}{4!} + \frac{b^5 i^5}{5!} \ldots\right) = e^a \cdot \left(\frac{b^0}{0!} + \frac{b^1 i}{1!} - \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3 i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5 i}{5!} \ldots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\frac{b^0}{0!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots \; + \; i \cdot \left(\frac{b^1}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \ldots\right)\right) = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$

Die e-Funktion interpretiert die Minuswurzel $b{\cdot}i$ immer als Winkel und vollzieht mit dem komplexen Punkt eine Drehstreckung um den Winkel b: $(a|b)_K \to (e^a{\cdot}\cos b \mid e^a{\cdot}\sin b)_K$. Diese Drehstreckung entspricht nahezu derjenigen, die man zur Transformation von Polar- in kartes. Koordinaten benötigt: $(r|\varphi)_P \to (r{\cdot}\cos\varphi \mid r{\cdot}\sin\varphi)_K$.

Eulers Schlussfolgerung

→ Wenn man in die e-Funktion, statt kartes. Koordinaten $(a|b)_K$, Polarkoordinaten $(r|\varphi)_P$ geschickt einsetzt, ergibt sich exakt diese Transformations-Drehstreckung: $r{\cdot}e^{\varphi\cdot i} = r{\cdot}\cos\varphi + r{\cdot}i{\cdot}\sin\varphi$ *(Eulerformel 1748)*. Die e-Funktion kann so Polarkoordinaten in kartes. umwandeln. Das erlaubt folgende Schreibweise: $4 + 3i = 5{\cdot}e^{0{,}6435i} = 5{\cdot}\cos(0{,}6435) + 5i{\cdot}\sin(0{,}6435) = 4 + 3i$.

→ Die Eulerformel zeigt insbesondere, dass $(1 \mid \pi)_P = (-1|0)_K$ gilt, denn $1{\cdot}e^{i\cdot\pi} = 1{\cdot}\cos\pi + i{\cdot}1{\cdot}\sin\pi = -1$, was umgestellt $e^{\pi\cdot i} + 1 = 0$ ergibt. Auch wenn diese Gleichung zu keiner neuen Erkenntnis führt und direkt anhand der Zahlenebene ersichtlich ist, empfindet man sie als ausgesprochen „schön". Denn wer hätte gedacht, dass sich die 5 grundlegenden Konstanten der Mathematik (e, π, i, 0, 1) so schön u. klar miteinander verbinden lassen. Generell ist es überaus erstaunlich, dass die einfache e-Funktion imstande ist, Drehbewegungen auszuführen.

Übung

25 Wandeln Sie folgende Zahlen in die übrigen 4 Darstellungsformen um, markieren Sie sie in der Zahlenebene und beschriften Sie die notierten Punkte jeweils mit ihren kartesischen- und ihren Polarkoordinaten.

a) 3-2i b) i c) –i d) i^2

e) $\sqrt{-9}$ f) $\sqrt{-21}$ g) $\sqrt{13} - 2{,}5i$ h) 5

i) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ j) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ k) $2 \cdot e^{i\,4{,}5\pi}$ l) –3i

m) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

k) $\frac{1}{-2+8i}$ l) $\frac{-8+2i}{4-9i}$

a)-e): $(3{,}61|-0{,}59)_P$ $(1|0{,}5\pi)_p$ $(1|-0{,}5\pi)_p$ $(-1|0)_K$ $(1|\pi)_p$ $(0|3)_K$ $(3|0{,}5\pi)_p$
f)-i): $(0|4{,}58)_K$ $(4{,}58|0{,}5\pi)_p$ $(3{,}61|-2{,}5)_K$ $(4{,}39|-0{,}61)_p$ $(5|0)_P$ $(5{,}5|3)_K$
j)-m): $(6{,}1|1{,}6)_K$ $(-1{,}3|-6{,}1)_K$ $(3|-1{,}57)_P$ $(3{,}3|3)_K$

26 Rechnen Sie möglichst geschickt, geben Sie das Ergebnis in kartesischen und Polarkoordinaten an und überprüfen Sie es mit wolframalpha.com.

a) $(3+4i)+(2-3i)$ b) $(-5+3i)+(5-5i)$

c) $(1-2i)-(-4-i)$ d) $(6+5i)-(8-3i)$

e) $(-3-4i)\cdot(7+4i)$ f) $(3+2i)\cdot(6-i)$

g) $9 \cdot e^{0{,}2i} \cdot 8 \cdot e^{-1{,}1i}$ h) $-4(-6+5i)$

i) $|7+6i| \cdot |-i|$ j) $9e^{0{,}2i} : 3e^{-1{,}1i}$

a)-d): $(5|1)_K$ $(5{,}1|0{,}2)_P$ $(0|-2)_K$ $(2|-1{,}5)_P$ $(5|-1)_K$ $(5{,}1|-0{,}2)_P$ $(-2|8)_K$ $(8{,}3|-1{,}8)_P$
e)-g): $(-5|-40)_K$ $(40{,}3|-1{,}7)_P$ $(20|9)_K$ $(21{,}9|0{,}4)_P$ $(44{,}8|56{,}4)_K$ $(72|-0{,}9)_P$
h)-l): $(24|-20)_K$ $(31{,}2|-0{,}7)_P$ 9,22 $(0{,}8|2{,}9)_K$ $(3|1{,}3)_P$ $(-0{,}5|-0{,}7)_K$ $(0{,}8|-2{,}2)_P$

27 Im Folgenden wird eine kubische Gleichung m. H. der Cardanischen Formel gelöst:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad \text{|Cardanische Formel s.u.}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+\sqrt{-121}\,)^{1/3} + (2-\sqrt{-121}\,)^{1/3}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+11\sqrt{-1}\,)^{1/3} + (2-11\sqrt{-1}\,)^{1/3} \qquad \text{|s. a)}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = (2+\sqrt{-1}\,) + (2-\sqrt{-1}\,)$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

a) Zeigen Sie, dass $(2+11i)^{1/3} = (2+i)$ gilt.

b) Inwiefern hat die obige Lösung zur Entdeckung der komplexen Zahlen geführt?

a) „Hoch 3" auf beiden Seiten, dann Klammer rechts auflösen.
b) Da man durch Ausprobieren wusste, dass 4 eine Lösung sein muss, hat man versucht, mit $\sqrt{-121}$ der Cardanischen Formel „sinnvoll" weiterzurechnen und auf 4 zu kommen. So entdeckte man einerseits, dass Minuswurzelzahlen „existieren" (Naturvorgänge abbilden können) und andererseits, wie man mit ihnen rechnen muss.

Cardanische Formel

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Big|\; p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c \qquad q := b - \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

$$x_{2,3} = \ldots \qquad \Big|\; \text{per Polynomdivision mit } x_1$$