Cardanische Formel

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big|\ p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c \qquad q := b - \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

$$x_{2,3} = \ldots \qquad \Big|\ \text{per Polynomdivision mit } x_1$$

→ Jede kubische Gleichung besitzt ***mindestens eine*** reellwertige Lösung (s. Graph einer kub. Fkt). Die obige Formel liefert als ***x_1 immer*** eine ***reelle Lösungszahl***. D.h., auch wenn sich im inneren der 3. Wurzeln Quadratwurzeln mit negativem Radikanden bilden sollten, so verrechnen sich diese immer zu einer reellen Zahl. Leider gibt es kein leichtes Verfahren, 3. Wurzeln von komplexen Zahlen zu berechnen. Man muss sie dazu in Polarkoordinaten überführen, was nur näherungsweise mit $\cos^{-1}$ bzw. $\tan^{-1}$ erfolgen kann. Obwohl für die reelle Lösungszahl x_1 also eine exakte Formel vorliegt, lässt sich diese i.d.R. nur näherungsweise ermitteln. Da das Näherungsverfahren über die Cardanische Formel (3. Wurzel) recht aufwendig ist, wird diese ***heute*** nicht mehr verwendet und x_1 direkt mit dem ***Newtonverfahren*** bestimmt.

→ Die ***reellen*** Lösungen einer kubischen Gleichung können ***als Nullstellen*** der entsprechenden (reellen) kubischen Funktion veranschaulicht werden. Die komplexen Lösungen (ggf. $x_{2,3}$) dagegen nicht.

→ ***(Lemma von Gauß):*** Hat eine normierte (a_n=1) ganzrationale Funktion $y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ ***nur ganzzahlige*** Koeffizienten, so ist ***jede rationale*** *(!)* Nullstelle ***ganzzahlig*** und ein ***Teiler*** von a_0.
So hat beispielsweise $y = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ die Nullstellen –3, –2, –1 und 1.
Die Nullstelle 4 von $y = x^3 - 15x - 4$ kann m. H. dieses Lemmas leicht erraten werden. Denn wenn diese Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten rationale Nullstellen besitzt, so müssen diese Teiler von ***– 4*** sein. Folglich testet man alle infrage kommenden Teiler {–4; –2; –1; 1; 2; 4} durch und erhält so 4 als Nullstelle. Die übrigen beiden Nullstellen können dann per Polynomdivision und abc-Formel ermittelt werden.