Der schlechteste Schütze überlebt*

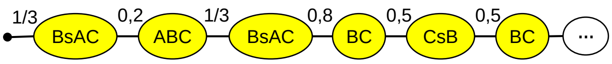
STEFAN BARTZ, MECKEL

***Zusammenfassung**: Bei einem Duell zwischen 2 Personen hat natürlich immer der beste Schütze die größte Überlebenswahrscheinlichkeit. Seltsamerweise gilt das bei 3 Personen nicht mehr. Dort ist plötzlich der schlechteste Schütze im Vorteil und kann sogar mit höchster Wahrscheinlichkeit überleben.*
Wieso das so ist, lässt sich leicht erklären (s. Resümee). Dagegen gelingt die Berechnung der konkreten Wahrscheinlichkeiten nicht auf Anhieb. In der Wochenzeitung DIE ZEIT (Hesse 2014) wurde das Problem einem breiten Publikum eröffnet, die zugehörigen Rechnungen aber – verständlicherweise – nicht aufgeführt. Dies wird hier nachgeholt. Im Stochastikunterricht können mit der verblüffenden Aufgabe Markov-Kette und Matrizen-Multiplikation anschaulich vorgestellt werden.

Problem

Mit welcher Wahrscheinlichkeit überleben Duellant A, B und C, wenn A mit 100% Sicherheit trifft, B mit 80% und C mit 50%. Vor jedem Schuss wird gedächtnislos[1] per Zufall ermittelt, wer als Nächster schießen darf. Der Schießberechtigte entscheidet, auf welchen Gegner er zielt. Es wird solange geschossen, bis 2 der 3 Duellanten getroffen sind.

Die gesuchten Überlebenswahrscheinlichkeiten werden im Folgenden mit *P(A)*, *P(B)* und *P(C)* bezeichnet. Bei dem Versuch, diese mit Hilfe eines Baumdiagramms schrittweise zu erfassen, erkennt man, dass unendlich viele Baumstufen entstehen. Einer dieser unendlich vielen interessierenden Pfade könnte z.B. so beginnen:



B wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 ausgelost und darf auf A oder C schießen (*BsAC*). Er trifft nicht und A, B und C leben anschließend weiter (*ABC*). Danach fällt das Los wieder auf B und er darf erneut auf AC schießen (*BsAC*). Er entscheidet sich für A, trifft diesmal und es verbleiben nur noch B und C (*BC*). Anschließend erhält C die Schießerlaubnis (*CsB*), er trifft nicht, BC überleben, usw. Theoretisch könnte der Vorgang unendlich lange so weitergehen.
Wahrscheinlichkeitsprobleme, die zu unendlich großen Baumdiagrammen führen, können häufig gelöst werden, indem man sie in Zustandsgraphen überführt. Welche unterschiedlichen Zustände können bei oben angedeutetem Baumdiagramm auftreten?

[1] Es wird beim Losen also nicht berücksichtigt, ob jemand schon einmal dran war oder nicht. Eine Person kann auch mehrere Male nacheinander die Schießerlaubnis erhalten.

Zustandsgraph

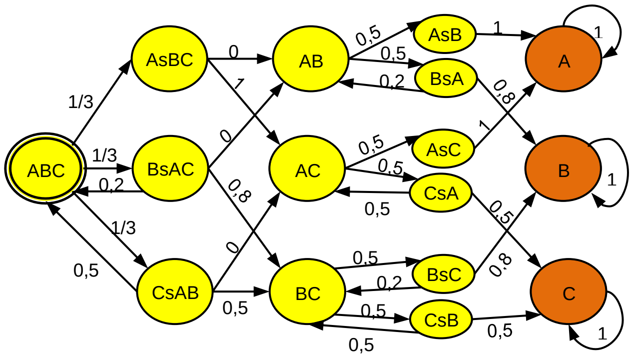


Abb. 1: Zustandsgraph

Da im Gegensatz zum Baumdiagramm nun auch Schleifen möglich sind, können mit 16 Zustandskonten alle Fälle des Duells vollständig erfasst werden. Exemplarisch zeigen wir einen (der unendlich vielen) möglichen Weg durch den Zustandsgraph:

Zu Beginn des Duells leben A, B und C, wir befinden uns im Startzustand *ABC*. Wenn B ausgelost wird, gelangen wir mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 in den Zustand *BsAC*. B zielt dann sinnvollerweise nicht auf den schwachen Gegner C sondern auf A und trifft diesen beispielsweise. So erreichen wir in 80% der Fälle *BC*. Nun könnte C ausgelost werden, was uns zum Knoten *CsB* führt. Trifft auch C, erreichen wir den Endzustand *C*. Das Duell ist zu Ende, wir können diesen Zustand nicht mehr verlassen, C hat überlebt.

Die Wahrscheinlichkeit, um zu dem so beschriebenen „*C-überlebt*“ Teilereignis zu gelangen, berechnet sich folglich mit:

$$P(C_i) = 1/3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 13{,}33\%$$

Wie lassen sich anhand des Zustandsgraphen nun *alle* möglichen „Wege“ zum Endzustand C erfassen und *P(C)* komplett berechnen?

Manuelle Lösung

Dazu stellen wir uns vor, dass die Knoten des Zustandsgraphen Wasserbehälter repräsentieren und die Pfeile Rohre, durch die Wasser von einem Behälter zum anderen gepumpt werden kann. Die Pfeilrichtung und die Pfeilwahrscheinlichkeit geben an, welcher Wasseranteil pro Pumpvorgang zu welchem Behälter befördert wird. Ein Pumpvorgang bearbeitet also die Wassermengen (sprich die Wahrscheinlichkeiten) in allen Behältern gleichzeitig, entsprechend der angegebenen Pfeilzahlen.

Pumpvorgang

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ABC	1,000	0,000	0,233	0,000	0,054	0,000	0,013	0,000	0,003	0,000
AsBC	0,000	0,333	0,000	0,078	0,000	0,018	0,000	0,004	0,000	0,001
BsAC	0,000	0,333	0,000	0,078	0,000	0,018	0,000	0,004	0,000	0,001
CsAB	0,000	0,333	0,000	0,078	0,000	0,018	0,000	0,004	0,000	0,001
AB	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AC	0,000	0,000	0,333	0,000	0,161	0,000	0,058	0,000	0,019	0,000
BC	0,000	0,000	0,433	0,000	0,253	0,000	0,112	0,000	0,045	0,000
AsB	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
BsA	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
AsC	0,000	0,000	0,000	0,167	0,000	0,081	0,000	0,029	0,000	0,009
CsA	0,000	0,000	0,000	0,167	0,000	0,081	0,000	0,029	0,000	0,009
BsC	0,000	0,000	0,000	0,217	0,000	0,126	0,000	0,056	0,000	0,022
CsB	0,000	0,000	0,000	0,217	0,000	0,126	0,000	0,056	0,000	0,022
A	0,000	0,000	0,000	0,000	0,167	0,167	0,247	0,247	0,276	0,276
B	0,000	0,000	0,000	0,000	0,173	0,173	0,274	0,274	0,319	0,319
C	0,000	0,000	0,000	0,000	0,192	0,192	0,295	0,295	0,338	0,338

Abb. 2: Zustandswahrscheinlichkeiten nach 9 Vorgängen

Vor dem 1. Pumpvorgang befinden sich 1 Liter Wasser (Wahrscheinlichkeit 1) im Startbehälter *ABC*, alle übrigen Behälter sind leer. Dieser Liter gelangt im 1. Pumpvorgang zu je 1/3 in die Behälter *AsBC*, *BsAC* und *CsAB*; damit ist *ABC* leer. Im 2. Pumpvorgang fließen 20% des Wassers von *BsAC* und 50% des Wassers von *CsAB* wieder zurück zu *ABC*, insgesamt also $0{,}2 \cdot 1/3 + 0{,}5 \cdot 1/3 = 0{,}233$ Liter. Das restliche Wasser fließt zu *AC* (0,333) und *BC* (0,433).

Pumpvorgang

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,006	0,000	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,017	0,000	0,006	0,000	0,002	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,003	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,003	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,008	0,000	0,003	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,008	0,000	0,003	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
0,286	0,286	0,289	0,289	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290
0,337	0,337	0,344	0,344	0,346	0,346	0,347	0,347	0,348	0,348
0,354	0,354	0,359	0,359	0,361	0,361	0,362	0,362	0,362	0,362

Abb. 3: Zustandswahrscheinlichkeiten nach 19 Vorgängen

Auf diese Weise verteilt sich das Wasser im Zustandsgraph bei jedem Pumpvorgang neu. Es fließt zwischen den Behältern hin und her und bewegt sich allmählich Richtung Endbehälter *A*, *B* oder *C*. Nach 18 Pumpvorgängen ist es dort komplett[1] angelangt und kann diese Gefäße nicht mehr verlassen. Wenn man die oben beschriebenen Rechnungen für jeden Pumpvorgang manuell durchführt, erhält man nach 18 Vorgängen die in Abb. 3 angegebenen Wassermengen in den Endgefäßen. Die Duellanten A, B und C überleben also mit den Wahrscheinlichkeiten: P(*A*) = 29,0%, P(*B*) = 34,8% und P(*C*) = 36,2%. C besitzt tatsächlich die größte und A die kleinste Überlebenswahrscheinlichkeit.

Elegantere Lösung

Der obige Zustandsgraph lässt sich leicht in eine 16 x 16-Übergangsmatrix *Ü* überführen:

	ABC	AsBC	BsAC	CsAB	AB	AC	BC	AsB	BsA	AsC	CsA	BsC	CsB	A	B	C
ABC	0	0	0,2	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AsBC	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BsAC	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CsAB	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AB	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0
AC	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0
BC	0	0	0,8	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0,5	0	0	0
AsB	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BsA	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AsC	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CsA	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BsC	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CsB	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0	0	0,8	0	0	1	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	1

Abb. 4: Übergangsmatrix *Ü*

Die erste Spalte zeigt, dass man vom Startzustand *ABC* in die Zustände *AsBC*, *BsAC* oder *CsAB* gelangen kann, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/3. In der dritten Spalte sind die „Verlassens-Wahrscheinlichkeiten“ von Zustand *BsAC* aufgeführt. Aus diesem Zustand gelangt man mit 0,2 zurück in ABC und mit 0,8 in den Zustand *BC*.

Die hervorgehobenen Zellen sind die Entscheidungszellen, in denen sich A, B bzw. C für den jeweils stärksten Gegner entscheiden. Die Endzustände *A*, *B* und *C* sind orange markiert. Man verbleibt mit der Wahrscheinlichkeit 1 in diesen Zuständen, das Spiel ist dann zu Ende, man kann von dort aus keinen anderen Zustand mehr erreichen.

Damit sind alle Informationen des Zustandsgraphen im Zahlenfeld *Ü* enthalten. Die oben vorgestellten aufwendigen manuellen Rechenschritte können jetzt eleganter durchgeführt werden. Multipliziert man die Übergangsmatrix *Ü* mit dem Startvektor $\vec{v_0}$, so erhält man sofort die Wassermengen des 1. Pumpvorgangs:

$$\ddot{U} \cdot \vec{v_0} = \ddot{U} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}000 \\ 0{,}333 \\ 0{,}333 \\ 0{,}333 \\ \cdots \\ 0{,}000 \end{pmatrix} = \vec{v_1}$$

Multipliziert man *Ü* danach mit $\vec{v_1}$, ergeben sich die Wassermengen des 2. Pumpvorgangs, usw.

Mit Excel lassen sich diese Multiplikationen leicht bewerkstelligen. Man trägt in die Zellen *B2:Q17* die Werte der Übergangsmatrix *Ü* und in *S2:S17* den Startvektor $\vec{v_0}$ ein. Danach markiert man die Zellen *T2:T17*, schreibt die Formel =MMULT($B$2:$Q$17; S2:S17) in die Bearbeitungsleiste und schließt diese – wichtig

[1] Bis auf 3 Nachkommastellen genau.

– nicht mit ENTER sondern mit der Tastenkombination STRG + Umschalt + ENTER ab[1]. Zieht man das Ausfüllkästchen der markierten Zellen *T2:T17* anschließend nach rechts weiter, erhält man alle Zustandswahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Pumpvorgänge auf „einen Streich“.

Resümee

- *Wie kann es passieren, dass der schlechteste Schütze C die höchste Überlebenswahrscheinlichkeit erhält?* Da jeder Duellant zuerst die stärkste Gefahr bannen muss, wird A anfangs von 2 möglichen Gegnern bedroht, B nur von einem und C von keinem. Diese reduzierte Bedrohung zu Beginn des Duells bewirkt, dass C auch insgesamt die geringste Bedrohung erfährt.
- *Lassen sich die Erkenntnisse des 3er-Duells übertragen auf andere Konkurrenzsituationen?* Ja, auf all jene, bei denen zuerst die stärksten Gegner abgewehrt werden müssen. Die schwächeren erhalten dadurch einen Vorteil – zumindest zeitweilig.
- *Was ist eine Markov-Kette?* Ein stochastischer Vorgang, der mit einem Zustandsgraph erfasst werden kann (also mit *verketteten*, diskreten, gedächtnislosen Zuständen). Es interessieren dabei Fragen wie: (i) Stabilisieren sich die Zustandswahrscheinlichkeiten, (ii) nach wie vielen Schritten und (iii) mit welchen Werten?
- *Wie lässt sich erkennen, ob ein Wahrscheinlichkeitsproblem durch einen Zustandsgraph modelliert werden muss?* Wahrscheinlichkeitsaufgaben lassen sich im Schulbereich fast immer über Baumdiagramme sicher lösen (Bartz 2008). Bei riesigen Baumdiagrammen stehen 4 Lösungsstrategien zur Verfügung (Bartz 2009):

  1) ausweichen auf das Gegenereignis
  2) Knoten zusammenfassen zu Treffer-/Nichttreffer-Knoten (um die Binomial- bzw. Hypergeometrische-Verteilung nutzen zu können)
  3) Knoten zusammenfassen zu Zustandsknoten
  4) Näherungslösung (Simulation, sonstige Verteilung)

  Immer dann, wenn die Lösungsstrategien 1) und 2) bei riesigen Baumdiagrammen versagen, sollte untersucht werden, ob sich die Baumknoten zu Zustandsknoten verschmelzen lassen. Scheitert auch das, ist man auf Näherungslösungen (4) angewiesen.
- *Man ist versucht, das dargestellte 3er-Duell etwas gerechter gestalten zu wollen.* Die Idee, dass je 2 oder sogar alle 3 Schützen gleichzeitig schießen dürfen, führt jedoch schnell zu Komplikationen. Denn was passiert, wenn einer sich nicht an das gemeinsame Startzeichen hält und einfach etwas früher abdrückt? Wenn das gleichzeitige Schießen problematisch ist, dann müsste doch zumindest sichergestellt werden, dass derjenige, auf den geschossen worden ist, danach selber schießen darf, und niemand 2-mal hintereinander die Schießerlaubnis erhält. Wenn also „alle“ anfangs auf A schießen, sollte ihm – im Überlebensfall – zumindest gewährt werden, anschließend selbst zur Waffe greifen zu dürfen. Dann müsste die Überlebenswahrscheinlichkeit von A doch steigen, oder? Leider nein! Sie sinkt sogar noch weiter auf 28,3% ab und die von C steigt bei dieser „Verbesserung“ auf hohe 45,0% an. Kontrollieren Sie es selbst! Als Hilfe sei der entsprechende Zustandsgraph gegeben[2]:

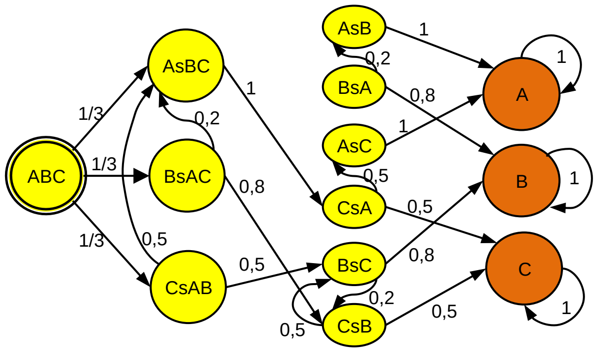


Abb. 5: „Verbesserte“ Duell-Regel

- *Übung 2:* Der Artikel von Hesse (2014) zeigt sehr schön, warum die „Stärkste-Gegner-Strategie“ die für alle Beteilige sinnvollste Verhaltensweise ist. Sie bewirkt ein *Nash-Gleichgewicht*, keiner kann also durch alleinige Strategieänderung seine Chancen verbessern. Überprüfen Sie auch diesen interessanten Aspekt. Der ursprüngliche Zustandsgraph muss dazu nur leicht abgeändert werden.
- *Übung 3:* Ebenso schnell ist gezeigt, dass *P(A)* auf *43,5%* anwächst, wenn die Duellanten die Trefferstärken ihrer Gegner *nicht* kennen.

Literatur

Bartz S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. In: *Stochastik in der Schule* 28(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm

Bartz, S. (2009): Was tun bei Mammutbäumen? In: *Stochastik in der Schule* 29(1).

Hesse, C. (2014): Ist Darwins Evolutionstheorie falsch? In: *ZEIT-Online* 27.2.2014. http://blog.zeit.de/mathe/wahrscheinlichkeitsrechnung/ist-darwins-evolutionstheorie-falsch

[1] Matrixformeln, die ihr Ergebnis in mehreren Zellen ausgeben, müssen in besondere geschweifte Klammern gefasst werden. Das lässt sich nur über STRG + Umschalt + ENTER erreichen.

[2] Es wird vorausgesetzt, dass die Duellanten sich hassen und keiner absichtlich daneben schießt. (Eigentlich müsste C in „*CsAB*“ an B vorbei schießen, damit B A bzw. A B ausschaltet. Dieses unehrenhafte Kalkül könnte jedoch entdeckt werden und A und B ziemlich erzürnen …)