Selbst-Bewichtelungen in 2 von 3 Spielen*

STEFAN BARTZ, MECKEL

***Zusammenfassung**: Beim weihnachtlichen Wichteln in der Klasse zieht jeder Schüler einen Namen aus einer Urne und weiß damit, wem er eine kleine Freude bereiten soll. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem derartigen Spiel mindestens ein Schüler seinen eigenen Namen zieht, ist mit ca. 63% überraschend hoch. Ebenso verwunderlich ist, dass diese Wahrscheinlichkeit nahezu unabhängig von der Anzahl der Teilnehmer ist. Will man die Gründe für beide Sachverhalte herausfinden, reichen die 4 Grundformeln der Schul-Kombinatorik nicht mehr aus. Man benötigt die Anzahl der <u>fixpunkthaltigen</u> Permutationen und damit ein weiteres kombinatorisches Abzählverfahren. Dieses lässt sich anhand des dargestellten Wichtelspiels sehr anschaulich erschließen. Interessierte Schüler können damit hochschulrelevantes Wissen im Bereich „Diskrete Mathematik" erwerben.*

Einleitung

Im Schulbereich genügt es, folgende Anordnungsmöglichkeiten abzählen zu können (Bartz 2013):

Anordnungsmöglichkeiten auf 5 Plätzen		
Einträge	Beispiel	Anzahl
5 versch.	✚ ☺ Ω Δ ≈	$\mathbf{5!}$
2 versch.	✚ ☺ _ _ _	$\frac{5!}{3!}$
2 gl.	☺ ☺ _ _ _	$\frac{5!}{3!2!}$
8 gl.	☺☺☺ | | ☺☺ | ☺☺ | ☺	$\frac{(8+4)!}{8!4!}$

Im 1. Fall spricht man von *Permutationen*, im 2. von *Variationen*, im 3. von *Kombinationen* und im 4. von *Mehrfachbesetzungen*. So gibt es *5!* Möglichkeiten, die 5 verschiedenen Einträge auf den 5 Plätzen anzuordnen. Bei den *Variationen* können die 3 leeren Einträge als gleiche Einträge interpretiert werden, was die ursprünglichen *5!* Anordnungsmöglichkeiten auf *5!/3!* reduziert. Bei den *Kombinationen* sind jeweils 2 und 3 der Einträge gleich, was die Zahl der unterschiedlichen Anordnungen weiter verringert zu *5!/(2!3!)*$=\binom{5}{2}$. Sind *Mehrfachbesetzungen* erlaubt, können die 4 Trennwände der 5 Plätze als verschiebbar angesehen werden. Dadurch liegen 4 und 8 gleiche Objekte vor, die auf *4+8 = 12* Positionen angeordnet werden dürfen. Wie vorhin gesehen ergeben sich dafür *12!/(8!4!)* Möglichkeiten.

Ein Wichtelvorgang kann als eine *Permutation*, d.h. als Neuanordnung von *n* Schülernummern aufgefasst werden. Es gibt *n!* Möglichkeiten die (verschiedenen) Nummern *1* bis *n* auf den *n* Plätzen neu anzuordnen. Wie viele der Neuanordnungen sind jedoch *fixpunkthaltig*, bei denen mindestens ein Eintrag den Platz beibehält? Um das zu ergründen wird im nachfolgenden Abschnitt zunächst die Anzahl der *fixpunkthaltigen* Permutationen bei 4 Plätzen, also bei einer Wichtel-Teilnehmerzahl von überschaubaren 4 Schülern bestimmt. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse können dann sofort auf *n* Schüler übertragen werden. Mit der Anzahl der *fixpunkthaltigen* Permutationen ergibt sich die Selbstbewichtelungs-Wahrscheinlichkeit mit:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ fixpunkthaltigen\ Permutationen}{Anzahl\ aller\ Permuationen\ (=n!)}$$

Wichteln mit 4 Schülern

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4 Schülern mind. einer sich selbst bewichteln muss?

E: mind. einer von 4 Schülern zieht sich selbst.

Gemäß des Standardlösungsverfahrens (Bartz 2008) zerlegen wir das interessierende Ereignis *E* mit Hilfe eines Baumdiagramms in einzelne Schritte. Als Baumstufen dienen die 4 teilnehmenden Schüler, die im Diagramm oben als Quadrate erscheinen. Schüler 1 kann nun Kugel 1, 2, 3 oder 4 aus der Urne ziehen, die anderen Schüler die jeweils übrigen Kugeln. Zieht ein Schüler sich selbst, wird der jeweilige Knoten dick umrandet. Alle Pfade, bei denen solche Fixpunkte auftreten – bei denen also mindestens ein Teilnehmer sich selbst gezogen hat – sind gelb markiert. Insgesamt kann man 15 fixpunkthaltige Pfade erkennen. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *E* beträgt somit: *P(E) = 15/24 =* <u>*62,50%*</u>.

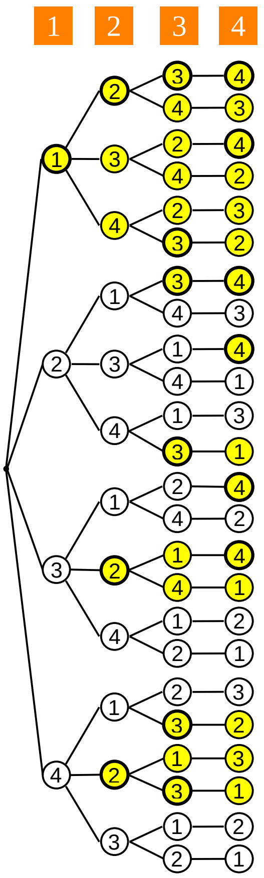
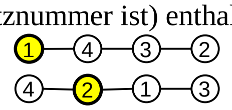
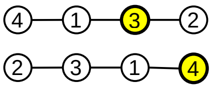


Abb. I: Baumdiagramm

Da bei *n* Schülern kein Baumdiagramm mehr gezeichnet werden kann, muss ein anderer Weg gefunden werden, die Anzahl der *fixpunkthaltigen* Baumpfade – zuerst bei 4 und dann bei *n* Schülern – systematisch abzählen zu können. Jeder der 4 Knotenplätze innerhalb eines Baumpfades kann einen Fixeintrag (bei dem die Eintragsnummer gleich der Platznummer ist) enthalten:





Setzen wir *einen* der vier Einträge „von Hand“ fix, so bleiben für die übrigen Einträge noch 3! Anordnungsmöglichkeiten; macht zusammen 4·3! = 24 Pfade, bei denen *mindestens* ein Fixeintrag vorliegt.

$$\underbrace{4\cdot(4-1)!}_{\text{mind. 1 Fixeintrag}}$$

Ebenso kann man die Anzahl der Pfade bestimmen, bei denen mindestens 2, mindestens 3 oder mindestens 4 Fixpunkte im Pfad vorhanden sind:

$$\underbrace{4\cdot(4-1)!}_{\text{mind. 1 Fixeintrag}} \quad \underbrace{\binom{4}{2}\cdot(4-2)!}_{\text{mind. 2}} \quad \underbrace{\binom{4}{3}\cdot(4-3)!}_{\text{mind. 3}} \quad \underbrace{\binom{4}{4}\cdot(4-4)!}_{\text{mind. 4 Fixeinträge}}$$

Die Binomialkoeffizienten zählt jeweils, wie viele Möglichkeiten es gibt, 2, 3 oder 4 Einträge eines 4er-Pfades „von Hand“ zu fixieren. Die Fakultäten berechnen die Anordnungsmöglichkeiten der übrigen, nicht fixierten Einträge.
Subtrahiert und addiert man diese Mindestens-Ausdrücke (im Folgenden mit M_1 bis M_4 bezeichnet) abwechselnd, ergibt sich exakt die Zahl aller fixpunkthaltigen Pfade, also gleich 15:

$$\underbrace{4\cdot(4-1)!}_{} - \underbrace{\binom{4}{2}\cdot(4-2)!}_{} + \underbrace{\binom{4}{3}\cdot(4-3)!}_{} - \underbrace{\binom{4}{4}\cdot(4-4)!}_{}$$

$$= \frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}$$

$$= 24 - 12 + 4 - 1 = 15 ✓$$

Wieso ist das so?
Die „Mindestens-Ausdrücke“ M_1 bis M_4 erfassen die fixpunkthaltigen Pfade mehrfach. So wird der Pfad mit 4 Fixeinträgen vom Ausdruck M_1 4-mal, von M_2 $\binom{4}{2}$ = 6-mal, von M_3 $\binom{4}{3}$ = 4-mal und von M_4 $\binom{4}{4}$ = 1-mal erfasst:

Zählt Pfade mit genau …	M_1	M_2	M_3	M_4
1 Fixeintrag	$\binom{1}{1}$-mal			
2 Fixeinträgen	$\binom{2}{1}$-mal	$\binom{2}{2}$-mal		
3 Fixeinträgen	$\binom{3}{1}$-mal	$\binom{3}{2}$-mal	$\binom{3}{3}$-mal	
4 Fixeinträgen	$\binom{4}{1}$-mal	$\binom{4}{2}$-mal	$\binom{4}{3}$-mal	$\binom{4}{4}$-mal

Tabelle I: Mehrfachzählungen

Interessanterweise bewirkt das abwechselnde Subtrahieren/Addieren, dass alle fixpunkthaltigen Pfade letztendlich genau 1-mal berücksichtigt werden. So werden z.B. die Pfade mit genau 4 Fixeinträgen durch den ersten Mindest-Ausdruck M_1 4-fach gezählt, durch M_2 6-fach subtrahiert, durch M_3 4-fach addiert und durch M_4 wieder 1-fach subtrahiert (4 – 6 + 4 – 1), insgesamt also genau 1-mal gezählt. Funktioniert dieses Einschluss-/Ausschluss-Verfahren auch bei 5, 6 oder allgemein bei *n* Schülern? Der dafür notwendige Beweis gründet auf der Feststellung, dass in Tabelle I immer die Zeilen des Pascal'schen Dreiecks (ohne führende 1) entstehen[1]. Und von denen weiß man, dass ihre alternierende Summe immer genau 0 beträgt. Da die führenden 1en fehlen, betragen die alternierenden Summen *hier* also immer 1, d.h. *jede* Mehrfachzählung wird durch dieses Verfahren zuverlässig rückgängig gemacht[2]. Mit diesem Abzählverfahren können damit alle fixpunkthaltigen Pfade des Baumdiagramms exakt ermittelt werden.

Wichteln mit *n* Schülern

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei *n* Schülern mind. einer sich selbst bewichteln muss?

E: mind. einer von n Schülern zieht sich selbst.[3]

Wie oben gesehen, lässt sich die Anzahl der fixpunkthaltigen Pfade über das Einschluss/Ausschluss-Verfahren bestimmen:

$$\underbrace{n(n-1)!}_{\text{mind. 1 Fixeintrag}} - \underbrace{\binom{n}{2}(n-2)!}_{\text{mind. 2}} + \underbrace{\binom{n}{3}(n-3)!}_{\text{mind. 3}} - \ldots \pm \underbrace{\binom{n}{n}(n-n)!}_{\text{mind. n Fixeinträge}}$$

$$= \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots \pm \frac{n!}{n!}$$

Diese alternierende Summe liefert für jede Schülerzahl *n* schnell die gesuchte Anzahl an fixpunkthaltigen Pfaden:

n	# fixpunkthaltiger Pfade	# aller (n!)	# fixpunktfreier
1	$\frac{1!}{1!} = 1$	1	0
2	$\frac{2!}{1!} - \frac{2!}{2!} = 1$	2	1
3	$\frac{3!}{1!} - \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 4$	6	2
4	$\frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!} = 15$	24	9
5	$\frac{5!}{1!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!} = 76$	120	44

Tabelle II: Beispielwerte

Allgemein können wir für die Anzahl der Permutationsmöglichkeiten bei n Schülern (Plätzen) folgendes festhalten:

$$\#_{\text{aller mögl. Permut.}} = n!$$

$$\#_{\text{fixpunkthaltig}} = n!\cdot\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

$$\#_{\text{fixpunktfrei}} = n! - \#_{\text{fixpunkthaltig}} = n!\cdot\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

Der letzte Ausdruck stimmt mit den ersten Gliedern der Zahl e^{-1} überein:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Damit gilt:

$$\#_{\text{fixpunktfrei}} = n!\cdot\left(\tfrac{1}{0!}-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\ldots\pm\tfrac{1}{n!}\right)$$
$$\approx n!\cdot\left(\tfrac{1}{0!}-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\ldots\pm\tfrac{1}{n!}\mp\cdots\right)$$
$$= n!\cdot\ \frac{1}{e} \qquad = n!\cdot 0{,}3779$$

Wenn ca. 37% aller Permutationen fixpunktfrei sind, müssen die restlichen ca. 63% fixpunkthaltig sein:

$$\#_{\text{fixpunkthaltig}} = n!\cdot\left(\tfrac{1}{1!}-\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}-\ldots\pm\tfrac{1}{n!}\right)$$
$$\approx n!\cdot\left(1-\tfrac{1}{e}\right) \qquad = n!\cdot 0{,}6321$$

Für die Selbstbewichtelungs-Wahrscheinlichkeit bei *n* Schülern ergibt sich damit:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ fixpunkthaltigen\ Permutationen}{Anzahl\ aller\ Permuationen\ (=n!)}$$
$$= \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots\pm\frac{1}{n!}$$
$$\approx 1-\frac{1}{e} \qquad = 63{,}21\%$$

Die gesuchte Selbstbewichtelungs-Wahrscheinlichkeit lässt sich also durch den von *n* unabhängigen Ausdruck „*1 – 1/e*“ annähernd bestimmen. Bereits ab 3 Schülern ist der Fehler dabei kleiner als 3%. Zufälliges Wichteln geht somit *generell* in ca. 2/3 aller Spiele *schief* – egal wie viele Schüler teilnehmen. Ca. 2/3 aller (zu einer betrachteten Ausgangsposition) möglichen Permutationen sind fixpunkthaltig.

Resümee

- Aus der Schulmathematik wissen wir, dass es *n!* Permutationen, also *n!* Möglichkeiten gibt, *n* verschiedene Einträge auf *n* Plätzen anzuordnen. Mit Hilfe der oben dargestellten Überlegungen können wir nun zusätzlich berechnen, wie viele dieser *n!* Permutationen fixpunkthaltig sind, wie viele fixpunktfrei sind und wie viele genau *k* Fixpunkte enthalten. Da die Formel für die Anzahl der fixpunktfreien genau die ersten Glieder von e^{-1} enthält und sich somit besser merken lässt, wird sie der folgenden Übersicht vorangestellt:

fixpunktfreie (Derangements, Subfakultät) $n!\cdot\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots\pm\frac{1}{n!}\right)$	$\approx n!\cdot\frac{1}{e}$
fixpunkthaltige Permutationen $n!\cdot\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots\pm\frac{1}{n!}\right)$	$\approx n!-n!\cdot\frac{1}{e}$
mit genau k Fixpunkten (Rencontres) $\binom{n}{k}\cdot(n-k)!\cdot\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots\pm\frac{1}{(n-k)!}\right)$	$\approx \frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{e}$

Tabelle III: Anzahlen bei Permutationen

Wer sich einprägt, dass man die Anzahl der *fixpunktfreien* Permutationen erhält, indem man die Anzahl aller möglichen mit den ersten Glieder der Zahl e^{-1} (ca. 37%) multipliziert, kann sich die anderen beiden Formeln schnell herleiten. Die Zahl der *fixpunkthaltigen* folgt direkt mit: *n! – fixpunktfreie*. Bei *genau k* Fixpunkten ergeben sich für die *k* gleichen Fixeinträge $\binom{n}{k}$ Anordnungsmöglichkeiten und für die übrigen *(n-k)* Einträge je $(n-k)!\cdot\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots\pm\frac{1}{(n-k)!}\right)$ *fixpunktfreie* Anordnungsmöglichkeiten.

- Wie viele der Pfade im anfänglichen Baumdiagramm enthalten somit *genau* 1, 2, 3, bzw. 4 Fixpunkte?

$\binom{4}{1}(4-1)!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=8$

$\binom{4}{2}(4-2)!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)=6;$

$\binom{4}{3}(4-3)!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)=0;\quad \binom{4}{4}(4-4)!\left(\frac{1}{0!}\right)=1.$

- Man hätte die erhaltenen Abzählformeln auch über folgenden *rekursiven* Ansatz, bei dem B_n für die Anzahl der *fixpunktfreien* Permutationen bei n Plätzen steht, herleiten können[4]:

$$B_n = (n-1)\cdot(B_{n-1} + B_{n-2})$$

Kratz (2005), Rasfeld (2006) und Krauter (2005) erläutern eine entsprechende Umsetzung für den Schulbereich. Wir haben uns dagegen für die direkte, nicht rekursive Herleitung entschieden, um so das Einschluss /Ausschluss-Verfahren erläutern und den *Sinn* der alternierenden Rechenweise in den Formeln veranschaulichen zu können.

- Das Einschluss/Ausschluss-Verfahren, das abwechselnd zu viele Pfade ein- und dann wieder ausschließt, wird in der Literatur auch *Inklusions-/Exklusion-Prinzip*, die zugehörende alternierende Rechenweise auch *Siebformel* genannt.

- Dem Autor ist das dargestellte Problem während des Sommerurlaubs begegnet, als die Töchter beim familiären „Mörderspiel“ wissen wollten, wie „oft“ es vorkommt, dass sich Spielteilnehmer selbst „ermorden müssen“. In der Literatur findet man Problem-Einkleidungen, bei denen es um vertauschte Briefe, Tanzpartner, Mäntel oder Hüte geht. Rasfeld (2006) beschreibt ein weiteres Anwendungsbeispiel. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass mindestens ein US-Soldat im Auslandseinsatz bei der Aktion „Brief an *irgendeinen* Soldaten“ zufälligerweise den Brief des *eigenen* Kindes erhält. Auch das geschieht mit der überraschend hohen Wahrscheinlichkeit von ca. 63%.

Anmerkungen

[1] *Wieso* entsteht in Tabelle I immer die Binomialkoeffizienten des Pascal’schen Dreiecks? In der untersten Zeile ist z.B. aufgeführt, wie oft der Pfad mit genau 4 Fixeinträgen von den „Mindestens-Ausdrücken“ M_1 bis M_4 erfasst

wird. Wieso wird dieser 4-Fixpunkt-Pfad jeweils genau $\binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}$ *bzw.* $\binom{4}{4}$ Mal erfasst? Mit dem Ausdruck $M_2 = \binom{4}{2} \cdot (4-2)!$ wird der 4 Fixpunkt-Pfad z.B. genau $\binom{4}{2}$-mal erfasst. Denn der erste Faktor zählt die Möglichkeiten, genau 2 Einträge „von Hand" zu fixieren. Zu *jeder* dieser $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten werden dann alle Anordnungsmöglichkeiten der restlichen, nicht fixierten Einträge mit (4-2)! berechnet. Bei *jedem* dieser $\binom{4}{2}$ Fälle wird also *jedes Mal* auch der Fall gezählt, bei dem sich auf den Reststellen zufällig weitere 2 Fixeinträge – also insgesamt 4 – ergeben.

[2] Die regulären, nicht-alternierenden Zeilensummen ergeben beim Pascal'schen Dreieck immer 2^n, die in Tabelle I folglich $2^n - 1$.

[3] Spontan denkt man, dass sich das Gegenereignis, bei dem *keiner* sich selbst ziehen darf, leichter abzählen lässt. Aber auch dabei müssen viele Fallunterscheidungen berücksichtigt werden. Z.B. *ob* ein Schüler bereits von einem vorherigen gezogen wurde oder *ob nicht*.

[4] Der Kerngedanke hinter dem rekursiven Zusammenhang $B_n = (n-1)\cdot(B_{n-1} + B_{n-2})$ lautet folgendermaßen: Angenommen die Zahlen B_{n-1} und B_{n-2} wären bekannt, d.h. wir wüssten, auf wie viele Möglichkeiten *n-1* (bzw. *n-2*) Einträge auf *n-1* (bzw. *n-2*) Plätzen *fixpunktfrei* anordbar sind. Kommt nun der Eintrag *n* und der Platz *n* hinzu, so darf der Eintrag *n* nicht auf den Platz *n* gelegt werden, da wir ja hier *fixpunktfreie* Permutationen benötigen. Der Eintrag *n* muss folglich mit irgendeinem bereits vorhandenen Eintrag getauscht werden. Dafür gibt es *(n-1)* Möglichkeiten. Da dies für jede der B_{n-1} fixpunktfreien Permutationen gilt, ergeben sich so $(n-1)\cdot B_{n-1}$ fixpunktfreie Anordnungsmöglichkeiten. Aber damit noch nicht genug. Man darf zusätzlich auch diejenigen Anordnungsmöglichkeiten mitzählen, bei denen auf den ursprünglichen *n-1* Plätzen *genau ein* Fixeintrag vorhanden war (das sind aus ähnlichen Gründen $(n-1)\cdot B_{n-2}$ Anordnungen). Bei all diesen lässt sich nämlich der Fixeintrag mit dem neuen Eintrag *n* zu einer insgesamt fixpunktfreien Anordnung wegtauschen.
Euler leitet diesen rekursiven Zusammenhang in wunderbarer Klarheit und äußerst lehrreich her (als Quellentext zu finden in dem sehr lesenswerten Artikel von Rasfeld 2006).

Literatur

Bartz S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. In: *Stochastik in der Schule* 28(1) S. 6-10. www.stefanbartz.de/materialien.htm

Bartz S. (2013): Empfehlungen zur Behandlung der Kombinatorik. In: *Stochastik in der Schule* 33(1). www.stefanbartz.de/materialien.htm

Kipp S. (2004): Die Mathematik des Wichtelns. www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/pci/wichteln.pdf

Kratz H. (2005): Das Problem der vertauschten Briefe – Zwei Wege zur Herleitung der Rekursionsformel. In: *Stochastik in der Schule* 25(1) S. 11-15.

Krauter S. (2005): *Einführung in die Elementare Kombinatorik.* www.ph-ludwigsburg.de/4251+M501364fd797.html

Rasfeld P. (2006): Die Untersuchung des Problems der vertauschten Briefe im Unterricht anhand von Quellentexten. In: *Stochastik in der Schule* 26(2) S. 20-27.