Euler entdeckt $e^{x \cdot i} = \cos x + i \cdot \sin x$

Von unendlichen Potenzreihen und komplexen Zahlen

Euler kennt wichtige unendliche Potenzreihen

$$e^x = \left(1+\frac{x}{\infty}\right)^{\infty}$$

$$e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$\cos x = \frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

$$\sin x = \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

$$\frac{1}{1-x} = x^0+x^1+x^2+\dots \quad | \int$$

$$-\ln(1-x) = \frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$$

* $\sqrt{\ }$–Werte mit dem Newtonverf.
** entdeckt von Newton 1664

Die links notierten 6 Gleichungen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Über sie werden die *e-*, *sin-*, *cos-* und *ln*-Werte im TR ermittelt.*

- **Wie hat Bernoulli die obere Gleichung entdeckt?**

  Monatliche Verzinsung zu 8%: $1€ \cdot \left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} \approx 1{,}0829$ €

  Tägliche Verzinsung zu 8%: $1€ \cdot \left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365} \approx 1{,}0832$ €

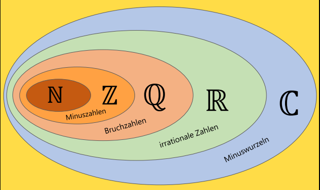
  Stetige Verzinsung zu 8%: $1€ \cdot \left(1+\frac{0.08}{\infty}\right)^{\infty} \approx 1{,}0833$ € $= e^{0.08}$

- **Wie hat Taylor die nächsten 3 Gleichungen hergeleitet?****
  Er versucht, die schwer berechenbare Funktion *exp:* $y=e^x$ durch eine leicht berechenbare Fkt *p:* $y = ax^0+bx^1+cx^2+dx^3$ vom Grad 3 anzunähern und fordert: p(0)=exp(0), p'(0)=exp'(0), p''(0)=exp''(0), p'''(0)=exp'''(0). So entsteht 1=a=b=2c=6d, also $e^x \approx 1+\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, und bei zunehmendem Grad die angegebene unendliche Potenzreihe. Die Fakultäten im Nenner entstehen also durch die Mehrfachableitungen von p.
- **(zu cos u. sin):** Als Eselsbrücke kann man sich merken, dass die cos-Funktion aus den geraden und die si**n**-Funktion aus den u**n**geraden Reihenglieder der e-Potenzreihe besteht (mit jeweils alternierenden Vorzeichen). In Taschenrechnern müssen, aus Periodizitätsgründen, nur die sin- und cos-Werte im Intervall 0<x<0,5π berechnet werden. Bereits die ersten 3 Reihenglieder liefern dort schon sehr gute Näherungswerte.
- **(zu 5):** Diese „Grund-Potenzreihe" wurde wahrscheinlich von den **Pythagoreern** in der Musik entdeckt. Bei einer Tonfolge mit gleichen Intervallen (z.B. Oktaven) bilden die zu greifenden Seitenlängen eine solche Reihe. Die Gleichung gilt natürlich nur für -1< x <1 sonst = ∞
- **Gleichung 6** entsteht, wenn man (5) auf beiden Seiten integriert. → überprüfen!
  Viele Taschenrechner berechnen über diese Gleichung die Logarithmuszahlen. Es stört dabei nicht, dass sie nur für -1< x <1 gilt, da beim 10er-Logarithmus jede Zahl entsprechend umgeformt werden kann: $\log 1748 = \log 0{,}1748 \cdot 10^4 = \log 0{,}1748 + 4$.

Wie erfährt Euler von diesen unendlichen Potenzreihen?
Euler studiert bei Johann Bernoulli, einem Freund seines Vaters. Die Bernoulli-Brüder gehören zu den führenden Mathematikern Europas. Sie wenden als erste die neue Analysis von Newton & Leibniz an. Sie kennen auch die Arbeit von Taylor, der in Cambridge bei Newton studiert.

Euler kann mit komplexen Zahlen rechnen

Idee



- Was sind komplexe Zahlen und wie kann man sie veranschaulichen? Ergänzt man die reellen Zahlen durch die „Minuswurzeln" (Wurzeln mit negat. Radikanden), erhält man die komplexen Zahlen. Sie liegen ober- bzw. unterhalb der Zahlengeraden und müssen mit 2 Koordinaten dargestellt werden (wobei die neue Koordinatenachse i-Achse genannt und $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird).
- Wozu benötigt man Minuszahlen? Um jede lineare Gleichung lösen zu können.
  Wozu benötigt man Minuswurzeln? Um jede ganzrationale Gleichung lösen zu können.
  Lösen Sie die Gleichung **$(x-2)^2 = -0{,}49$** und markieren Sie die Ergebniszahl in der Zahlenebene.
  $(x-2)^2 = -0{,}49 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{0{,}49 \cdot (-1)} \Leftrightarrow x = 2 \pm 0{,}7i$ („2 nach rechts und 0,7 nach oben bzw. unten")
- Wieso darf mit Minuswurzeln nur indirekt (mit i) gerechnet werden? * $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{1} = 1$
- Wie hat man erkannt, dass Minuswurzeln sehr nützlich sind?
  Seit 1545 kennt man die Cardanische Formel, mit der man jede kubische Gleichung lösen kann. Die Formel liefert z.B. bei $x^3 - 15x - 4 = 0$ die Minuswurzel $\sqrt{-121}$. Rechnet man mit dieser sinnvoll weiter, erhält man die richtige Lösung x=4 (s. Aufg. 27).

3 Darstellungsformen kartes. Koord. Punkt-/Summenform Polarkoord. Punkt-/ e-Form Mischkoord. cos-sin-Form	$(4 \mid 3)_K = 4 + 3i$ „4 nach rechts, 3 rechtwinklig nach oben" $(5 \mid 2)_P = 5 \cdot e^{2i}$ „5 nach rechts, 2^{RAD} kreisförmig nach oben" $(5 \cdot \cos 2 \mid 5 \cdot \sin 2)_K$ Polarkoord. 5 u. 2 sichtbar, das Ergebnis sind jedoch kart. Koord.
Umwandlung kartes. Koord. ↔ Polarkoord.	$(r \mid \varphi)_P = (r \cdot \cos\varphi \mid r \cdot \sin\varphi)_K$ $(5 \mid 2)_P = (5 \cdot \cos 2 \mid 5 \cdot \sin 2)_K \approx (-2{,}08 \mid 4{,}55)_K$ $(a \mid b)_K = (\sqrt{a^2+b^2} \mid \pm\cos^{-1}\frac{a}{r})_P$ neg., falls b neg. $(4 \mid 3)_K = (\sqrt{16+9} \mid \pm\cos^{-1}\frac{4}{5})_P \approx (5 \mid 0{,}64)_P$
Rechnen mit kartes. Koord. Strichrechnung leicht	$(a\|b)_K + (c\|d)_K = (a+c \mid b+d)_K$ $(a\|b)_K \cdot (c\|d)_K = (ac-bd \mid ad+bc)_K$ Ausmultiplizieren $(a\|b)_K - (c\|d)_K = (a-c \mid b-d)_K$ $(a\|b)_K : (c\|d)_K = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \mid \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right)_K$ Erweitern mit c-di
Rechnen mit Polarkoord. Punktrechnung leicht	$(r\|\alpha)_P + (s\|\beta)_P =$ *...zu kompliziert...* $(r\|\alpha)_P \cdot (s\|\beta)_P = (rs \mid \alpha+\beta)_P$ $(r\|\alpha)_P - (s\|\beta)_P =$ *...zu kompliziert...* $(r\|\alpha)_P : (s\|\beta)_P = (r:s \mid \alpha-\beta)_P$
$\bar{z}$ „z konjungiert" **$\|z\|$** „z Betrag"	• meint die an der reellen-Achse gespiegelte Zahl $z = (4\|3)_K \Rightarrow \bar{z} = (4\|-3)_K$ • meint den Abstand zum Ursprung 0 $\|z\| = \sqrt{Realteil^2 + Imaginärteil^2} = 5$

* Das direkte Rechnen mit $\sqrt{-1}$ ist schwierig. Aufgrund der negat. Basis u. des geraden Exponent-Nenners gelten die gängigen Potenzgesetze nicht mehr.

Eulers Frage

Was „macht“ die e-Funktion mit einer komplexen Zahl?

Eulers Entdeckung

$$e^{a+b\cdot i} = e^a \cdot e^{b\cdot i} = e^a \cdot \left(\frac{(bi)^0}{0!} + \frac{(bi)^1}{1!} + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^5}{5!} \dots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\frac{b^0 i^0}{0!} + \frac{b^1 i^1}{1!} + \frac{b^2 i^2}{2!} + \frac{b^3 i^3}{3!} + \frac{b^4 i^4}{4!} + \frac{b^5 i^5}{5!} \dots\right) = e^a \cdot \left(\frac{b^0}{0!} + \frac{b^1 i}{1!} - \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3 i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5 i}{5!} \dots\right)$$

$$= e^a \cdot \left(\frac{b^0}{0!} - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots \;+\; i \cdot \left(\frac{b^1}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \dots\right)\right) = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$

Die e-Funktion interpretiert die Minuswurzel $b{\cdot}i$ folglich immer als Winkel und vollzieht mit dem komplexen Punkt eine Drehstreckung um den Winkel b: $(a|b)_K \to (e^a{\cdot}\cos b \mid e^a{\cdot}\sin b)_K$. Diese Drehstreckung entspricht nahezu derjenigen, die man zur Transformation von Polar- in kartes. Koordinaten benötigt: $(r|\varphi)_P \to (r{\cdot}\cos\varphi \mid r{\cdot}\sin\varphi)_K$.

Eulers Schlussfolgerung

→ Wenn man in die e-Funktion, statt kartes. Koordinaten $(a|b)_K$, Polarkoordinaten $(r|\varphi)_P$ geschickt einsetzt, ergibt sich exakt diese Transformations-Drehstreckung: $r{\cdot}e^{\varphi\cdot i} = r{\cdot}\cos\varphi + r{\cdot}i{\cdot}\sin\varphi$ *(Eulerformel 1748)*. Die e-Funktion kann so Polarkoordinaten in kartes. umwandeln. Das erlaubt folgende Schreibweise: $4 + 3i = 5{\cdot}e^{0{,}6435i} = 5{\cdot}\cos(0{,}6435) + 5i{\cdot}\sin(0{,}6435) = 4 + 3i$.

→ Die Eulerformel zeigt insbesondere, dass $(1 \mid \pi)_P = (-1|0)_K$ gilt, denn $1{\cdot}e^{i\cdot\pi} = 1{\cdot}\cos\pi + i{\cdot}1{\cdot}\sin\pi = -1$, was umgestellt $e^{\pi\cdot i} + 1 = 0$ ergibt. Auch wenn diese Gleichung zu keiner neuen Erkenntnis führt und direkt anhand der Zahlenebene ersichtlich ist, empfindet man sie als ausgesprochen „schön“. Denn wer hätte gedacht, dass sich die 5 grundlegenden Konstanten der Mathematik (e, π, i, 0, 1) so schön u. klar miteinander verbinden lassen. Generell ist es überaus erstaunlich, dass die einfache e-Funktion imstande ist, Drehbewegungen zu bewirken.

Übung

25 Wandeln Sie folgende Zahlen in die übrigen 4 Darstellungsformen um, markieren Sie sie in der Zahlenebene und beschriften Sie die notierten Punkte jeweils mit ihren kartesischen- und ihren Polarkoordinaten.

a) 3-2i b) i c) –i d) i^2

e) $\sqrt{-9}$ f) $\sqrt{-21}$ g) $\sqrt{13} - 2{,}5i$ h) 5

i) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ j) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ k) $2 \cdot e^{i\,4{,}5\pi}$ l) –3i

m) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

a)-e): $(3{,}61|-0{,}59)_P$ $(1|0{,}5\pi)_p$ $(1|-0{,}5\pi)_p$ $(-1|0)_K$ $(1|\pi)_p$ $(0|3)_K$ $(3|0{,}5\pi)_p$
f)-i): $(0|4{,}58)_K$ $(4{,}58|0{,}5\pi)_p$ $(3{,}61|-2{,}5)_K$ $(4{,}39|-0{,}61)_p$ $(5|0)_P$ $(5{,}5|3)_K$
j)-m): $(6{,}1|1{,}6)_K$ $(-1{,}3|-6{,}1)_K$ $(3|-1{,}57)_P$ $(3{,}3|3)_K$

26 Rechnen Sie möglichst geschickt, geben Sie das Ergebnis in kartesischen und Polarkoordinaten an und überprüfen Sie es mit wolframalpha.

a) $(3 + 4i) + (2 - 3i)$ b) $(-5 + 3i) + (5 - 5i)$

c) $(1 - 2i) - (-4 - i)$ d) $(6 + 5i) - (8 - 3i)$

e) $(-3 - 4i) \cdot (7 + 4i)$ f) $(3 + 2i) \cdot (6 - i)$

g) $9 \cdot e^{0{,}2i} \cdot 8 \cdot e^{-1{,}1i}$ h) $-4(-6 + 5i)$

i) $|7 + 6i| \cdot |-i|$ j) $9e^{0{,}2i} : 3e^{-1{,}1i}$

k) $\frac{1}{-2+8i}$ l) $\frac{-8+2i}{4-9i}$

a)-d): $(5|1)_K$ $(5{,}1|0{,}2)_P$ $(0|-2)_K$ $(2|-1{,}5)_P$ $(5|-1)_K$ $(5{,}1|-0{,}2)_P$ $(-2|8)_K$ $(8{,}3|-1{,}8)_P$
e)-g): $(-5|-40)_K$ $(40{,}3|-1{,}7)_P$ $(20|9)_K$ $(21{,}9|0{,}4)_P$ $(44{,}8|56{,}4)_K$ $(72|-0{,}9)_P$
h)-l): $(24|-20)_K$ $(31{,}2|-0{,}7)_P$ 9,22 $(0{,}8|2{,}9)_K$ $(3|1{,}3)_P$ $(-0{,}5|-0{,}7)_K$ $(0{,}8|-2{,}2)_P$

27 Im Folgenden wird eine kubische Gleichung m. H. der Cardanischen Formel gelöst:

$x^3 - 15x - 4 = 0$ |Cardanische Formel s.u.

$\Rightarrow$ $x_1 = (2+\sqrt{-121}\,)^{1/3} + (2-\sqrt{-121}\,)^{1/3}$

$\Rightarrow$ $x_1 = (2+11\sqrt{-1}\,)^{1/3} + (2-11\sqrt{-1}\,)^{1/3}$ |s. a)

$\Rightarrow$ $x_1 = (2+\sqrt{-1}\,) + (2-\sqrt{-1}\,)$

$\Rightarrow$ $\underline{x_1 = 4}$

a) Zeigen Sie, dass $(2+11i)^{1/3} = (2+i)$ gilt.

b) Inwiefern hat die obige Lösung zur Entdeckung der komplexen Zahlen geführt?

a) „Hoch 3“ auf beiden Seiten, dann Klammer rechts auflösen.

b) Da man durch Ausprobieren wusste, dass 4 eine Lösung sein muss, hat man versucht, mit $\sqrt{-121}$ der Cardanischen Formel „sinnvoll“ weiterzurechnen und auf 4 zu kommen. So entdeckte man einerseits, dass Minuswurzelzahlen „existieren“ (Naturvorgänge abbilden können) und andererseits, wie man mit ihnen rechnen muss.

Cardanische Formel

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ | $p := \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c$ $q := b - \frac{a^2}{3}$

$\Leftrightarrow$ $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$

$x_{2,3} = \dots$ | per Polynomdivision mit x_1